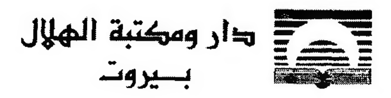
مبادئ التحليل المركب

fundamentals of complex analysis

تأليف

الدكتور محمود كتكت





المحتويات

المقدمة

انطلاقاً من شعوري بواجبي ومسؤوليتي تجاه الأجيال فقد أخذت على نفسي أن أقدم لهذه الأمة خلاصة خبرتي في مجال تخصصي ومجال تدريسي في الجامعات العربية لسنوات عديدة لا تقل عن عشر سنوات. فكان هذا الكتاب بإذن الله وتوفيقه خطوة على الطريق ولبنة في البناء نضعه بين يدي القارىء العربي ليكون كتاباً منهجياً للمتخصصين ومرجعاً علمياً لمن له صلة بالموضوع من أساتذة وطلبة.

كان هذا الكتاب مشروحاً باللغة العربية ليسهل تناوله وهضمه من قبل القارىء العربي ولكن جعلنا المعادلات بالرموز اللاتينية حتى يتمكن القارىء من الاتصال بالمراجع الأجنبية خاصة أولئك الذين يتقدمون في دراستهم فوق مستوى البكالوريوس حيث إننا نعيش في شبه مرحلة إنتقالية بين الاعتماد الكلي على المراجع الأجنبية وبين الاعتماد الذاتي الجزئي. وحتى يكتب الله لأمتنا الاعتماد على ذاتها كلياً بتشجيع حركة التأليف والترجمة باللغة العربية كاملاً فإن هذا الكتاب سيثري المكتبة العربية العلمية بالمؤلفات العلمية التخصصية إن شاء الله.

إن الهدف من الكتاب هو تغطية المنهاج الذي تدرسه الجامعات العالمية في مقرر التحليل المركب في مستوى السنة الثالثة فقط لذلك جعلناه سبعة فصول يتناول الفصل الأول تعريف الأعداد المركبة وخصائصها وخاصة فكرة جذور

العدد المركب. أما الفصل الثاني فقد خصص للدوال التحليلية وخصائصها (وهي الدوال القابلة للاشتقاق) وخاصة معادلتي كوشي - ريمان وكذلك الدوال التوافقية وعلاقتها بالدوال التحليلية.

ولقد بحثنا خصائص بعض الدوال المشابهة للدوال الحقيقية الأولية (الأساسية) مثل الدالة الأسيّة والدالة اللوغاريتمية والدوال المثلثية والزائدية وركزنا على خصائص هذه الدوال المركبة التي تختلف عن تلك لمثيلاتها الحقيقية. كل هذا عرض في الفصل الثالث.

أما الفصل الرابع فيبدأ بتعريف التكامل المركب ويتدرج في إيجاد الحلول من أبسط الأنواع حتى يصل إلى تكامل المسار على كانتور مغلق وبسيط ويناقش نظرية ريمان للتكامل ونتائجها.

إن متسلسلات القوى المركبة تلعب دوراً هاماً كذلك في الموضوع عامة وخاصة في تمثيل الدوال التحليلية. وركّزنا على تمثيل الدوال بمتسلسلات تايلور وماكلورين وكذلك متسلسلات لورانت وتم نقاش أنواع الأصفار والأقطاب فكان ذلك مادة الفصل الخامس.

أما الفصل السادس فيتناول نظرية الباقي التي تمكن من إيجاد قيمة تكامل المسار على كانتور يحتوي بمنطقته الداخلية أكثر من قطب واحد. وكذلك ناقشنا كثيراً من التكاملات المعتلة والتكاملات المثلثية التي يصعب (أو لا يمكن) إيجاد قيمتها بالطرق التقليدية المعروفة في التفاضل والتكامل وكيفية إيجاد قيم مثل هذه التكاملات كتطبيق على نظرية الباقي.

وأخيراً تناولنا فكرتي الاستمرار التحليلي والدالة المطابقة، في الفصل السابع وأفردنا بندين من هذا الفصل لنوعين هامين من الدوال المطابقة الأول التحويل مزدوج الخطية والثاني تحويل شوراتز - كريستوفل. ثم عرضنا وصفاً للأفكار الفيزيائية مثل التوزيع الحراري والجهد الكهربائي والمغناطيسي وتدفق السوائل كتطبيقات للدوال التحليلية خاصة المطابقة وتحويل شوارتز - كريستوفل - أقول وصفاً وليس تحليلاً رياضياً لأننا آثرنا أن نشير إلى وجود التطبيقات الفيزيائية والهندسية للموضوع وعدم إهمال هذه الإشارة استكمالاً للكتاب حيث إن

هـدف الكتاب كـما ذكرت عـلى الأقل في طبعتـه الأولى هو تغـطية المنهـاج الذي يـدرس في الجامعـات في مقرر التحليـل المـركب ولا أعتقـد أن أي أستـاذ يمكن تغطية الفصول السبعة كاملة بشكل عميق وجاد لكثافـة المادة وقصر زمن المقـرر وهو الفصل الدراسي التقليدي.

هذا ما أردت قوله بين يدي الكتاب راجياً من القارىء وأخصّ زملاء المهنـة الأسـاتـذة الـذين يـدرسّـون مثـل هـذا الكتـاب ألاّ يبخلوا عـلي بمـلاحـظاتهم ونصائحهم وتصويباتهم فهذا العمل جهد المقـل وجهد بشر يتصف بصفـة البشر من القصـور وظهـور الثغــرات. وإنني إن شـاء الله أكــون شـاكــراً لهم عـلى ملاحظاتهم ونصائحهم وأعدهم إن مد الله في عمري أن آخد بتلك الملاحـظات والتصويبات في الطبعة الثانية للكتاب وأدعو الله لهم بالتوفيق. ورحم الله امرىء أهدى إلى عيوبي.

والله من وراء القصد.....

المؤلف

دكتور / محمود كتكت

الفصل الأول

الأعداد المركبة

COMPLEX NUMBERS

١ - ١ الماهية الجبرية للأعداد المركبة

١ - ٢ الماهية التحليلية للأعداد المركبة

١ - ٣ الشكل القطبي للأعداد المركبة

١ - ٤ جذور وقوى الأعداد المركبة

١ - ٥ المستوي المركب

الفصل الأول

الأعداد المركبة
Complex Numbers

لعلّ ما يميز العدد الحقيقي أن مربعه موجب دائماً وبالتالي فإنه من المعروف أنه لا يوجد حل للمعادلة $x^2 = -2$ في مجموعة الأعداد الحقيقية. من أجل ذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع حقل الأعداد الحقيقية لنحصل على حل لمثل هذه المعادلات الجبرية، فعرّفت الأعداد المركبة. هذا التعريف يتضمنه البند الأول من هذا الفصل بالإضافة إلى الخصائص الجبرية لهذه الأعداد. أما البند الثاني فخصص لمعرفة الماهية التحليلية للأعداد المركبة. وعرضنا شكلاً خاصاً للأعداد المركبة يسمى الشكل القطبي في البند الثالث، وكذلك بحثنا قوى وجذور الأعداد المركبة في البند الرابع. أما البند الخامس فخصص لدراسة بعض الخصائص التبولوجية لمجموعات جزئية من الأعداد المركبة.

١ ـ ١ الماهية الجبرية للأعداد المركبة:

تعرّف مجموعة الأعداد المركبة والتي يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ بأنها حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ في نفسها أي أن:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\} \quad \ldots\ldots (١ ـ ١)$$

تعرّف عمليتا الجمع والمضاعف العددي لعناصر المجموعة $\mathbb{C}$ كما هي في الأزواج المركبة فيكون الجمع بجمع المركبات المتناظرة والمضاعف العددي بضرب كل المركبات بالعدد المعنى وبالرموز يكون:

$$(\text{x, y}) + (a, b) = (x + a, y + b) \quad \ldots\ldots (١ - ٢)$$

$$\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \ldots\ldots (١ - ٣)$$

لكل: (x, y) , (a, b) في $\mathbb{C}$ و α في $\mathbb{R}$.

ويمكن القول إن النظام الجبري الثلاثي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ يمثل فراغاً خطياً.

كما يمكن تعريف عملية الضرب لعددين مركبين بالمساواة التالية:

$$(x, y) \cdot (a, b) = \big((ax - by) , (xb + ay)\big) \quad \ldots\ldots (١ - ٤)$$

وبهذه العملية تصبح المجموعة $(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ زمرة تبديلية أي تحقق الصفات التالية:

١ - عملية الضرب عملية تبديلية:

$$(x, y) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (x, y)$$

٢ - عملية الضرب عملية تجميعية:

$$(x, y) \cdot \big((a, b) \cdot (c, d)\big) = \big((x, y) \cdot (a, b)\big) \cdot (c, d)$$

٣ - يوجد عنصر نظير ضربي وهو:

$$(1, 0) \quad \ldots\ldots (١ - ٥)$$

٤ - لكل عنصر (x, y) في $\mathbb{C}^*$ يوجد نظير ضربي له وهو $(x, y)^{-1}$ حيث:

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \;,\; \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \ldots\ldots (١ - ٦)$$

ونترك التحقق من هذه الخصائص تمريناً للقارىء.

وإذا مثلنا الأزواج المرتبة من الصورة $(x, 0)$ بالعدد الحقيقي x فإنه يمكن تمثيل أي عدد مركب على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \end{aligned}$$

ومن خصائص العدد المركب $(0, 1)$ أن:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \quad \ldots\ldots (١ - ٧)$$

فإذا رمزنا للعدد المركب $(0, 1)$ بالرمز i فإن:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \ldots\ldots (١ - ٨)$$

أي أن $i = \sqrt{-1}$، ويسمى العدد التخيلي بالتالي يأخذ العدد المركب z الصورة التالية:

$$z = (x, y) = x + yi \quad \ldots\ldots (١ - ٩)$$

حيث أن:

$$x = \text{Re}.z \quad , \quad y = \text{Im}.z \quad \ldots\ldots (١ - ١٠)$$

أي أن الجزء الحقيقي من العدد المركب z هو x والجزء التخيلي من العدد المركب z هو y. وإذا كان $x = 0$ فإن $z = yi$ عدد تخيلي خالص وإذا كان $y = 0$ فإن $z = x$ عدد حقيقي خالص. وعليه فإن مجموعة الأعداد المركبة تعرف كما يلي:

تعريف ١:

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ معرفة بالمساواة التالية:

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

أما عمليات الجمع والطرح والضرب والمضاعف العددي فتعرف كما يلي:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\alpha (a + bi) = (\alpha a) + (\alpha b)i$$

ومما تقدم نستنتج أن النظير الجمعي للعدد المركب $a + bi$ هو $-a - bi$ وأن النظير الضربي له هو $x + yi$ حيث إن:

$$x + yi = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \quad \ldots\ldots (١ - ١١)$$

أما قسمة العددين المركبين $a + bi$, $c + di$ فهي:

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)(x + yi)$$

حيث إن $x + yi$ يمثل النظير الضربي للعدد $c + di$ أي أن:

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} + \frac{-d}{c^2 + d^2} i\right)$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

مثـال ١:

أكتب الكسر التالي على الصورة $x + yi$:

$$\frac{(2 - 3i) + (5 + 2i)}{(-1 + 2i)(1 + i)}$$

الحـل:

بتطبيق مفهوم جمع وضرب وقسمة الأعداد المركبة نجد:

$$\frac{(2 - 3i) + (5 + 2i)}{(-1 + 2i)(1 + i)} = \frac{7 - i}{-3 + i}$$

$$= (7 - i)(-3 + i)^{-1}$$

$$= (7 - i)\left(\frac{-3}{10} + \frac{-1}{10} i\right)$$

$$= \frac{1}{10}(-22 - 4i)$$

$$= -\frac{11}{5} - \frac{2}{5} i$$

تمارين ١ ـ ١

١ ـ تحقق من الخاصية التبديلية (١) للأعداد المركبة.

٢ ـ تحقق من الخاصية التجميعية (٢) للأعداد المركبة.

٣ ـ بيِّن أن $\sqrt{2}\ i$ و $-\sqrt{2}\ i$ جذران للمعادلة المركبة:

$$z^2 + 2 = 0$$

٤ ـ بيِّن أن $-1 + \sqrt{2}\ i$ جذر للمعادلة المركبة:

$$z^2 + 2z + 3 = 0$$

٥ ـ بيِّن أنه لأي عدد مركب z إذا كان $\mathrm{Im}\cdot z > 0$ فإن $\mathrm{Im}\cdot\left(\frac{1}{z}\right) < 0$.

٦ ـ بيِّن أنه لأي عددين مركبين z_1 و z_2 إذا كان كل من $z_1 + z_2$ و $z_1 \cdot z_2$ عدداً حقيقياً سالباً فإن كلاً من z_1 و z_2 عدد حقيقي.

٧ ـ برهن أنه لأي عددين مركبين z_1 و z_2 إذا كان $z_1 \cdot z_2 = 0$ فإن z_1 أو z_2 أو كلاهما يكون صفراً.

٨ ـ إذا كان $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 1 - 2i$ و $z_3 = 5 + 3i$ أحسب قيمة ما يلي:

أ ـ $z_1 \cdot z_2$ ب ـ $z_2 \cdot z_3$

جـ ـ $z_1^2 + z_2^{-1}$ د ـ $z_1^2 + z_3$

هـ ـ $\frac{z_2}{z_3}$ و ـ $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_3}$

ز ـ $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}$ ح ـ $\frac{z_1 - z_2}{z_3}$

٩ ـ برهِّن أن:

أ ـ $\mathrm{Re}\cdot(iz) + -\mathrm{Im}\cdot z$ لأي عدد مركب z.

ب ـ $\mathrm{Im}\cdot(iz) = \mathrm{Re}\cdot z$ لأي عدد مركب z.

جـ ـ $i^{-1} = -i$

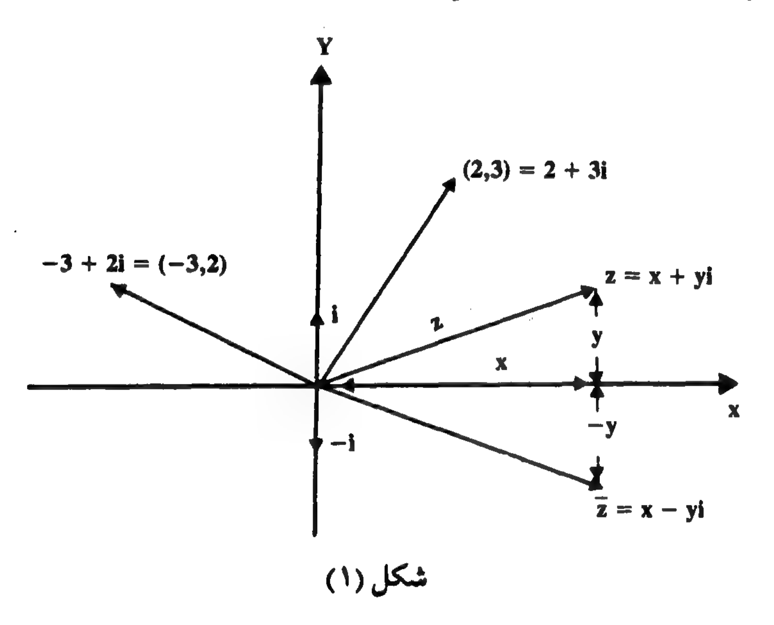
١٠ ـ إذا كانت $z_1, z_2, \ldots, z_n$ أعداداً مركبة فتحقق من أن:

أ ـ $$\mathrm{Re}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\cdot z_k$$

ب ـ $$\mathrm{Im}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\cdot z_k$$

١ ـ ٢ الماهية التحليلية للأعداد المركبة:

مما تقدم في البند السابق تبيّن لنا أنه يمكن أن ننظر للأعداد المركبة على أنها مجموعة النقاط التي يتكوّن منها المستوي الديكارتي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وعليه يمكن دراسة الخصائص التحليلية والهندسية للأعداد المركبة، فيمكن أن نعتبر أن العدد المركب يمثل متجهاً يحدّد بقيمة واتجاه، وكذلك يمكن أن نفسّر جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها هندسياً، وفي هذه الحالة يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور التخيلي.



شكل (١)

أما طول المتجه الذي يمثل العدد المركب فيسمى القيمة المطلقة للعدد المركب أو مقياسه وهو معرّف فيما يلي:

تعريف ٢:

القيمة المطلقة أو مقياس العدد المركب $z = x + yi$ والذي يرمز له بالرمز $|z|$ معرف بالمساواة التالية:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots (١ - ١٢)$$

وكـذلك انعكـاس المتجه (الـذي يمثل العـدد المركب) في المحـور الحقيقي x فيسمى المرافق المركب وهو معرّف فيما يلي:

تعريف ٣:

لكـل عدد مـركب $z = x + yi$ يوجـد مرافق مـركب له يـرمز لـه بالـرمز $\bar{z}$ ومعرّف بالمساواة:

$$\bar{z} = x - yi \quad \ldots\ldots (١ - ١٣)$$

مثـال ٢:

ليكن $z = 5 - 2i$ و $w = 3 + i$ جد ما يلي:

أ - $|w|, |z|$ ب - $|\bar{w}|, |\bar{z}|$

جـ - $\frac{1}{w}, \frac{\bar{w}}{\bar{w}\,w}$ د - $\frac{z}{w}$

هـ - $z\,\bar{z}$ و - $\overline{wz}$

الحـل:

أ - $|w| = \sqrt{10} \;, \; |z| = \sqrt{29}$

ب - $|\bar{w}| = \sqrt{10} \;, \; |\bar{z}| = \sqrt{29}$

جـ - $\frac{1}{w} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$

وكذلك:

$$\frac{\bar{w}}{\bar{w}\,w} = \frac{3 - i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$$

لاحظ أن:

$$\frac{\overline{w}}{\overline{w}\,w} = \frac{1}{w}$$

د ـ من الملاحظة السابقة نجد أن:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = (5-2i)\left(\frac{3}{10} - \frac{i}{10}\right)$$

$$= \frac{13}{10} - \frac{11}{10}i$$

هـ ـ $z\,\overline{z} = 29$ لاحظ أن $|z|^2 = 29$ كذلك.

و ـ

$$\overline{wz} = \overline{(3+i)(5-2i)}$$

$$= \overline{(17-i)} = 17 + i$$

لاحظ كذلك أن:

$$\overline{w} \cdot \overline{z} = 17 + i$$

أي أن:

$$\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$$

النظرية التالية تجمع بعض الخصائص التحليلية للإعداد المركبة:

نظرية ١:

لأي عددين مركبين w, z فإن:

أ ـ $z\,\overline{z} = |z|^2$

ب ـ $|z|\,|w| = |zw|$

جـ ـ $|\overline{z}| = |z|$

د ـ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

هـ ـ $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

و ـ $Re \cdot z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

ز ـ $Im \cdot z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

حـ ـ $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

ط ـ $\bar{\bar{z}} = z$

ق ـ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

البرهـان:

نبرهن الفروع أ، د، ق ونترك إثبات بقية الفروع تمـريناً للقـارىء ولإثبات أ نقول باستخدام تعريف ٢ وتعريف ٣ نجد أن:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

ولإثبات د فإن:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

بينما:

$$\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-yi}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = \frac{1}{z}$$

ولإثبات ق نقول إن:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{1}{|w|^2}\;\overline{z\cdot\overline{w}}$$

$$= \frac{\overline{z}\,w}{|w|^2} = \overline{z}\cdot\frac{w}{w\,\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

أما النظريـة التاليـة فتحتوي متبـاينات تلعب دوراً هـاماً في التحليـل المركب احداها المتباينة المثلثية.

نظرية ٢:

لأي عددين مركبين $z = x + yi$ و $w = s + ti$:

أ - $\text{Re}\cdot z \leqslant |z| \leqslant |\text{Re}\cdot z| + |\text{Im}\cdot z|$

ب - $|z + w| \leqslant |z| + |w|$

جـ - $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leqslant |z - w|$

البرهـان:

لبرهنة المتباينة المثلثية (ب) نستخدم فرع أ من النظرية السابقة لنقول:

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2\end{aligned}$$

وبتطبيق الفرع أ من نظرية ٢ ينتج أن:

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &\leqslant |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &\leqslant (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على المطلوب.

نترك إثبات الفرع (أ) تمريناً للقارىء ونعطي برهاناً جزئياً للفرع (جـ)، لذلك نفرض أن $\alpha = z + w$ في المتباينة المثلثية ونعوض بدلاً من w قيمتها $w = \alpha - z$ لنحصل على ما يلي:

$$|\alpha| \leqslant |z| + |\alpha - z|$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$|\alpha| - |z| \leqslant |\alpha - z|$$

ويمكن أن نبرهن (انظر تمرين ٥ من تمارين ١ ـ ٢) أن:

$$-|\alpha - z| \leqslant |\alpha| - |z|$$

وبتوفيق النتيجتين نستنتج أن:

$$-|\alpha - z| \leqslant |\alpha| - |z| \leqslant |\alpha - z|$$

أي أن:

$$\big||\alpha| - |z|\big| \leqslant |\alpha - z|$$

مثـال ٣:

بيِّن أن النقاط التي تحقق المعادلة $|z| = 2$ تقع على محيط دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

الحـل:

بتعويض ما تساويه القيمة المطلقة بدلالة المتغيرين x و y في المعالة $|z| = 2$ نجد أن:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

وبالتالي يكون:

$$x^2 + y^2 = 4$$

وهذه معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2.

وبشكل عام فإن المعادلة:

$$|z - z_0| = r \quad \ldots\ldots (١ - ١٤)$$

تمثل معادلة دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ نصف قطرها r لأن المعادلة تكتب بالصيغة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

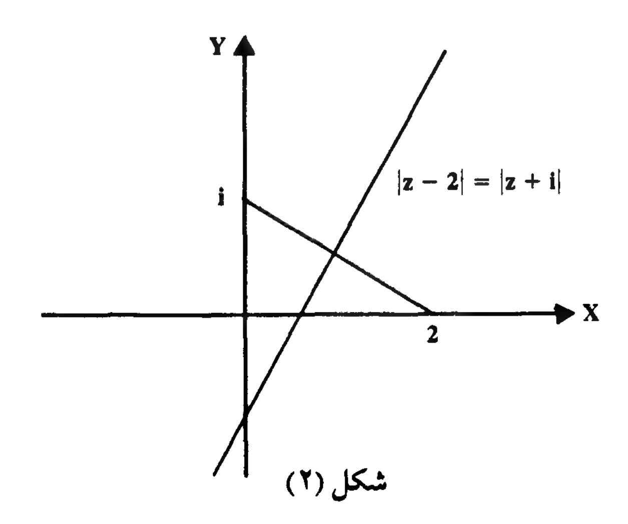
مثال ٤:

صف مسار نقطة تتحرك بحيث تحقق المعادلة:

$$|z - 2| = |z + i|$$

الحل:

النقطة التي تتحرك بحيث تحقق المعادلة $|z + i| = |z - 2|$ يكون بعدها عن النقطة 2 مساوياً دائماً لبعدها عن النقطة i وبالتالي يكون مسار هذه النقطة هو الخط المستقيم العمودي والمنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين 2 و i.



شكل (٢)

مثال ٥:

صف مسار النقطة التي تتحرك بحيث تحقق المعادلة:

$$|z + i|^2 = \text{Im} \cdot (z + 2i)$$

الحل:

نحوِّل المعادلة إلى الإحداثيات المستطيلة (الكارتيزية):

$$x^2 + (y + 1)^2 = y + 2$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$x^2 + y^2 + y = 1$$

ومن ذلك فإن:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص (Ellipse).

مثال ٦:

بيِّن أنه إذا كانت النقطة z على محيط دائرة نصف قطرها 2 فإن:

أ - $|z^2 + 2z - 1| \leqslant 9$

ب - $\dfrac{1}{|z^3 - 1|} \leqslant \dfrac{1}{7}$

الحل:

حيث إن النقطة تقع على محيط دائرة نصف قطرها 2 فإنها تحقق المعادلة:

$$|z| = 2$$

ومن ذلك وباستخدام المتباينة المثلثية نحصل على ما يلي:

$$| z^2 + 2z - 1 | \leqslant | z |^2 + 2 | z | + 1 = 9$$

وباستخدام المتباينة (جـ) من النظرية ٢ فإن:

$$| z^3 - 1 | \geqslant \left| | z |^3 - 1 \right| = 7$$

وبذلك يكون:

$$\frac{1}{| z^3 - 1 |} \leqslant \frac{1}{7} .$$

تمارين ١ ـ ٢

١ ـ اعتماداً على أن العدد المركب يمكن أن ينظر إليه كمتجه، أعط تفسيراً هندسياً لجمع الأعداد المركبة، طرحها، وضرب الأعداد المركبة بعدد حقيقي موجب، بعدد حقيقي سالب.

٢ ـ أعط كذلك تفسيراً هندسياً للنظير الجمعي للعدد المركب، النظير الضربي للعدد المركب، حاصل ضرب عددين مركبين وكذلك قسمة عددين مركبين.

٣ ـ برهن الفروع ب، جـ، هـ، و، ز، حـ، ط من النظرية ١.

٤ ـ برهن الفرع أ من النظرية ٢.

٥ ـ أكمل برهان الفرع جـ من النظرية ٢.

٦ ـ برهن أن: $\operatorname{Im} \cdot z \leqslant |\operatorname{Im} \cdot z| \leqslant |z|$

لأي عدد مركب z.

٧ ـ أ ـ برهن أن $z = \bar{z}$ إذا وإذا فقط كانت z عدداً حقيقياً خالصاً.

ب ـ برهن أن $-z = \bar{z}$ إذا وإذا فقط كانت z عدداً تخيلياً خالصاً.

٨ ـ أ ـ برهن أنه إذا كانت $|z| = \operatorname{Re} \cdot z$ فإن z عدد حقيقي موجب.

ب ـ برهن أن $\bar{z}^2 = z^2$ إذا وإذا فقط كانت z إما عدداً حقيقياً خالصاً أو عدداً تخيلياً خالصاً.

٩ ـ لأي عدد مركب z برهن أن:

$$|\operatorname{Re} \cdot z| + |\operatorname{Im} \cdot z| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$$

١٠ ـ برهن أنه إذا كانت $z \neq 1$ وكانت $|z| = 1$ فإن:

$$\operatorname{Re} \cdot \left(\frac{2}{1 - z}\right) = 1$$

١١ ـ بيِّن أن لأي مجموعة من الأعداد المركبة $z_1, z_2, \ldots, z_n$ فإن:

أ ـ
$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$$

ب ـ
$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$$

جـ ـ لأعدد عدد مركب z فإن:

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad , \quad \overline{nz} = n\,\overline{z}$$

١٢ ـ صف مجموعة النقاط التي تحقق الشرط الوارد في كل مما يلي:

أ ـ $Re \cdot z = -1$ ب ـ $| 2z + 3i | = 4$

جـ ـ $| z - 2 + i | = 1$ د ـ $| z | = Re \cdot z + 3$

هـ ـ $2 | z | = 3 | z + 1 |$ و ـ $| z + i | < 2$

ز ـ $Im \cdot z \leqslant -2$ حـ ـ $| z - 2 | = | z + 3i |$

ط ـ $Re \cdot [\, z(1 + i) \,] = 0$ ي ـ $z - 2i | + | z + 2i | = 0$

١٣ ـ بيِّن أن الأعداد المركبة التالية تمثل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع:

$$z = \left(1 + \sqrt{3}\right) i \quad , \quad w = 1 + i \quad , \quad s = -1 + i$$

١٤ ـ إذا علمت أن:

$$z^4 + 3z^2 - 4 = (z^2 + 4)(z^2 - 1)$$

بيِّن أن:

أ ـ إذا كانت z تقع على الدائرة $| z | = 2$ فإن:

$$\left| \frac{1}{4} z^4 + \frac{3}{4} z^2 - 1 \right| \leqslant 10$$

ب ـ إذا كانت z تقع على الدائرة $| z | = 3$ فإن:

$$\frac{4}{| z^4 + 3z^2 - 4 |} \leqslant \frac{1}{10} .$$

١٥ ـ أ ـ بيِّن أن المعادلة $x^2 - y^2 = 1$ يمكن أن تأخذ الصيغة:

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2$$

ب ـ بيِّن أن المعادلة $xy = 1$ يمكن أن تأخذ الصيغة:

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$$

١ ـ ٣ الشكل القطبي للأعداد المركبة:

يمكن استخدام الإحداثيات القطبية r, θ للتعبير عن العـدد المركب z ليـأخذ صيغة تسمى الشكل القطبي للعدد المركب. حيث إن:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2$$

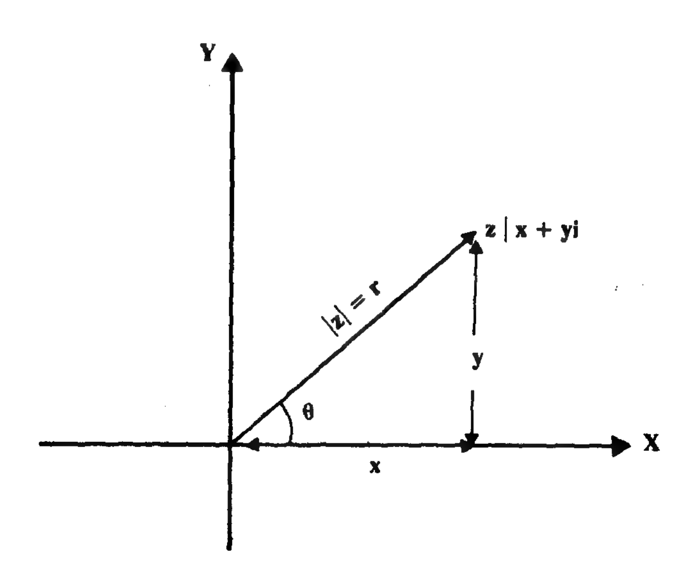
ينتج لدينا:

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\Phi),$$

حيث $|z| = r$، وبالتالي فإن:

$$(١ ـ ١٥) \; \ldots\ldots \; z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad , \quad |z| = r$$

تسمى θ السعة الزاويّة للعدد المركب z وبالرموز $\theta = \arg z$ وبما أن قيمة θ التي تحقق (١ ـ ١٥) ليست وحيـدة بسبب كـون $\sin\theta$ و $\cos\theta$ دالتـين دوريتـين ودورتهما 2π نحتاج إلى تحديد قيمة θ بدورة واحدة حسب المتباينة التالية:



شكل (٣)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad -\pi < \theta \leqslant \pi \quad \ldots\ldots \quad (١ - ١٦)$$

وعندها تسمى قيمة θ تلك السعة الرئيسية للعدد المركب z وبالرموز:

$$\phi = \operatorname{Arg} z$$

أي أن العدد المركب z يأخذ الصيغة:

$$z = |z| \left(\cos(\phi + 2n\pi) + i \sin(\phi + 2n\pi)\right) \quad \ldots\ldots \quad (١ - ١٧)$$

حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad , \quad -\pi < \phi \leqslant \pi$

النظرية التالية تلخص بعض خصائص السعة الزاوية للعدد المركب.

نظرية ٣:

نفرض أن z و w عددان مركبان فإن:

أ ـ $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

ب ـ $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$

جـ ـ $\arg(1/z) = -\arg z$

د ـ $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

البرهـان:

حسب الشكل القطبي للعدد المركب (الصيغة ١ ـ ١٥)) فإن:

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta) \ ,$$
$$w = |w| (\cos\gamma + i \sin\gamma)$$

حيث إن θ و γ هما السعة (الزاويّة) للعددين z و w على الترتيب.

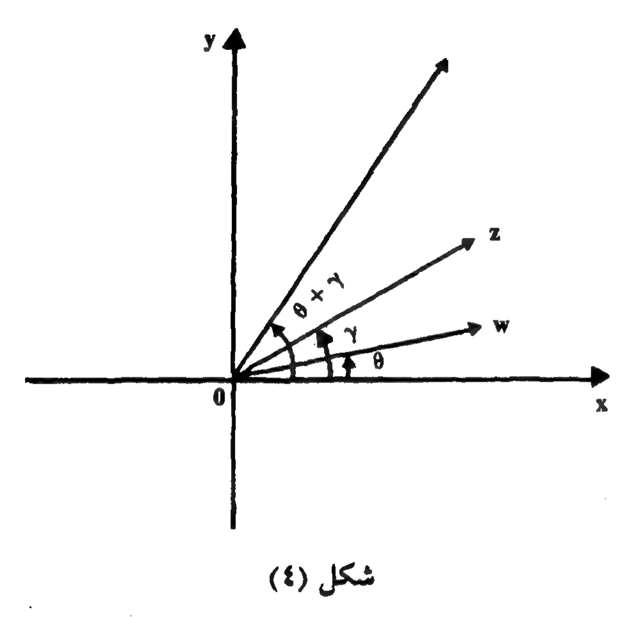
نجد حاصل ضرب العددين وهو:

$$zw = |z|\,|w| \left((\cos\theta \cos\gamma - \sin\theta \sin\gamma) + \right.$$
$$\left. + i(\cos\theta \sin\gamma + \sin\theta \cos\gamma)\right)$$
$$= |z|\,|w| \left(\cos(\theta + \gamma) + i \sin(\theta + \gamma)\right)$$

وعليه فإن السعة الزاوية للعدد المركب zw هي $\gamma + \theta$ أي أن:

$$\arg (zw) = \arg z + \arg w$$

(وبالتمثيل المتجه للعدد المركب يتبيّن لنا أن المعنى الهندسي لضرب عددين مركبين يتمثل بضرب القيمتين المطلقتين للعددين مع دوران عكس عقارب الساعة لأحدهما مقداره سعة العدد الآخر. انظر الشكل (٤).



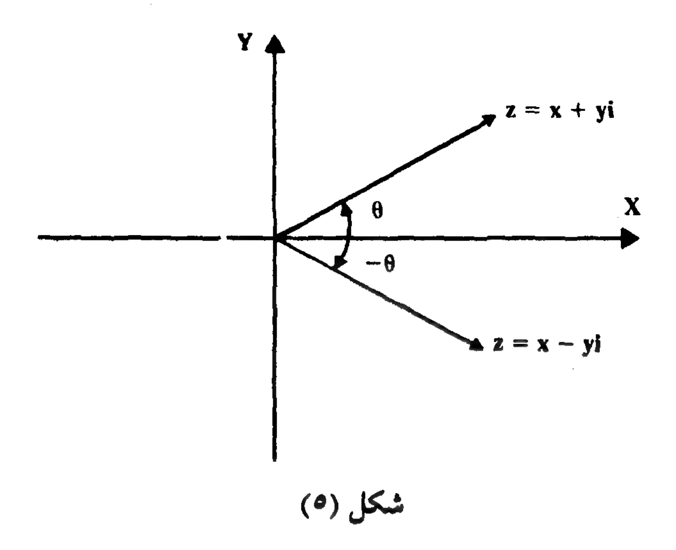
شكل (٤)

أما تأثير حاصل ضرب القيمتين المطلقتين للعددين المركبين فهو تكبير أو تصغير لمقدار أحد العددين المركبين اعتماداً على كون القيمة المطلقة للعدد المركب الآخر أكبر أو أصغر من 1). وهذا ينهي إثبات الفرع أ.

يمكن أن نوظف الفرعين أ، جـ لإثبات الفرع ب. ولإثبات الفرع جـ فإننا نستعين بالفرع د لنقول إن:

$$\arg \left(\frac{1}{z} \right) = \arg \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} \right) = - \arg z$$

نترك إثبات الفرع د تمريناً للقارىء لوضوحه هندسياً. انظر الشكل (٥).



شكل (٥)

مثـال ٦:

جد السعة والسعة الرئيسية للعدد المركب $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.

الحـــل:

حسب تعريف السعة θ نجد أن:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \sqrt{3}$$

ومن ذلك فإن:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

أما السعة الرئيسية لهذا العدد فهي أصغـر قيمة مـوجبة للسعـة θ بحيث تقع بين $-\pi, \pi$ أي أن $\phi = \frac{\pi}{3}$.

مثـــال ٧:

جد السعة والسعة الرئيسية للعدد المركب واكتبه بالشكل القطبي:

$$z = (\sqrt{3} - i) / (1 + i)$$

الحـــل:

بتطبيق الفرع (ب) من النظرية السابعة نجد أن:

$$\arg z = \arg\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)$$

$$= \arg(\sqrt{3} - i) - \arg(1 + i)$$

فإذا كانت $\arg(\sqrt{3} - i) = \theta$ و $\arg(1 + i) = \gamma$ فإن:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

$$\gamma = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\arg z = \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{7\pi}{12} + 2n\pi,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فيكون الشكل القطبي للعدد المركب z كما يلي:

$$z = \frac{|\sqrt{3} - i|}{|1 + i|}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + 2n\pi\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

ملاحظة:

من الجدير بالذكر أن ننوّه على أن العلاقة أ في النظريـة السابقـة قد لا تكـون صواباً إذا حولناها بدلالة السعة الرئيسية أي أن العلاقة:

$$\text{(١٨ - ١)} \quad \ldots . \quad \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$$

قد لا تكون صحيحة كما يشير إلى ذلك المثال التالي:

مثـال ٨:

بيِّن أن العلاقة (١ ـ ١٨) ليست صواباً بالضرورة.

الحـل:

نفرض أن $z = 3i$ وأن $w = -2$ فإن:

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \operatorname{Arg} w = \pi$$

وكذلك:

$$\operatorname{Arg} zw = \operatorname{Arg}(-6i) \neq -\frac{\pi}{2}$$

ولكن:

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \frac{3\pi}{2}$$

وهذا يشير بأن:

$$\operatorname{Arg} zw \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w.$$

تعريف ٤:

لأي عدد حقيقي θ نعرف $\exp i\theta = e^{i\theta}$ بالمعادلة التالية:

$$\text{(١٩ - ١)} \quad \ldots . \quad \exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

وباستخدام هذه الصيغة والتي تعرف بأنها صيغة يولر Euler Formula يمكن إعطاء صيغة أخرى للعدد المركب حيث:

$$\text{(٢٠ - ١)} \quad \ldots . \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\, e^{i\theta}$$

ولهذه الصيغة فوائد كثيرة، منها تسهيل إثبات النظرية التالية التي تسمى De Moivere's Theorem.

نظرية ٤ (De Moivre's Theorem):

لأي عدد حقيقي θ ولأي عدد صحيح موجب n تكون المعادلة:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \ldots\ldots (١ - ٢١)$$

صواباً.

البرهان:

بتوظيف المعادلة (١ - ١٩) نستنتج أن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وكذلك من فوائد المعادلة (١ - ٢٠) إعطاء برهان آخر للنظرية ٣ مثال ذلك لإثبات الفرع ب نوظف العلاقة (١ - ٢٠) لنستنتج أن:

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg\left(\frac{|z|\,e^{i\theta}}{|w|\,e^{i\gamma}}\right) = \arg\left(\frac{|z|}{|w|}\,e^{i(\theta-\gamma)}\right)$$

$$= (\theta - \gamma) = \arg z - \arg\gamma$$

وستظهر فوائد أخرى للمعادلة (١ - ٢٠) في البند القادم.

مثال ٩:

اكتب العدد المركب التالي على الصيغة (١ - ٢٠) (والتي تسمى الصيغة الأسية للعدد المركب):

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{\sqrt{3} - i}$$

الحل:

بتوظيف الصيغة (١ - ٢٠) نحصل على ما يلي:

$$z = \frac{|-1 + \sqrt{3}\,i|}{|\sqrt{3} - i|}\,e^{i(\theta-\gamma)}$$

حيث إن :

$$\theta = \arg(-1 + \sqrt{3}\, i) \quad , \quad \gamma = \arg(\sqrt{3} - i)$$

وبما أن :

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

وكذلك :

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-5}{6}\pi$$

فإن :

$$z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= e^{\frac{9\pi}{6} i} = e^{\frac{3\pi}{2} i}$$

تمارين ١ - ٣

١ - برهن الفرعين ب، د من النظرية ٣.

٢ - جد ما يلي:

أ - $\left| \dfrac{2+3i}{3+4i} \right|$

ب - $\left| i(2-i)^3 \right|$

جـ - $\left| 2i(1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+2i) \right|$

د - $\left| (1+i)^5 \right|$

٣ - جد ما يلي:

أ - $\arg\left(\dfrac{2+3i}{3+4i} \right)$

ب - $\arg (1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i)$

جـ - $\arg (1+i)^6$

د - $\arg\left(i(4-3i)^3 \right)$

٤ - أكتب الأعداد المركبة التالية بالشكل القطبي ثم بالشكل الأسيّ:

أ - $\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}-i}$

جـ - $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{(1-i)^2}$

ب - $\dfrac{i}{1+i}$

د - $3-4i$

٥ ـ أكتب الأعداد المركبة التالية على الصيغة $x + yi$:

أ ـ $3e^{\frac{\pi}{3}i}$ ب ـ $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$

جـ ـ $e^{\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$ د ـ $-5e^{-\frac{7\pi}{2}}$

هـ ـ $4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

و ـ $2\left[\cos\frac{3\pi}{5} - i\sin\frac{3\pi}{5}\right]$

٦ ـ لأي عددين مركبين z و w برهن أن:

$$|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re} \cdot (z\overline{w})$$

٧ ـ برهن أن المثلث الذي تتكوّن رؤوسه من $z, 0$ و w يكون متساوي الأضلاع إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$|z|^2 = |w|^2 = 2\,\mathrm{Re} \cdot (z\overline{w})$$

٨ ـ برهن أن المساواة:

$$|z + w| = |z| + |w|$$

صحيحة إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$\arg z = \arg w$$

٩ ـ برهن لأي عددين مركبين z و w أن:

أ ـ $\arg(z\overline{w}) = \arg z - \arg w$

ب ـ $\arg z = \arg w$ إذا وإذا فقط $z = \alpha w$ حيث إن α عدد حقيقي موجب.

١٠ ـ برهن أنه إذا كان $\mathrm{Re}\, z > 0$ و $\mathrm{Re}\, w > 0$ فإن:

$$\mathrm{Arg}\,(zw) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w$$

١١ ـ إذا فرض أن $zw \neq 0$ برهن أن:

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = |z|\,|w|$$

إذا وإذا فقط:

$$\theta - \gamma = 2n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث إن:

$$\theta = \arg z \quad , \quad \gamma = \arg w$$

١٢ ـ إذا فرض أن $zw \neq 0$ برهن أن:

$$|z - w| = \big|\, |z| - |w| \,\big|$$

إذا وإذا فقط:

$$\theta - \gamma = 2n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حيث إن $\theta = \arg z$ و $\gamma = \arg w$.

١٣ ـ صف مجموعة الأعداد المركبة z التي تحقق:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \neq -\operatorname{Arg} z$$

١٤ ـ برهن المتطابقة التالية:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad , z \neq 1$$

١٥ ـ في التمرين السابق بفرض أن $|z| = 1$ استخدم الصيغة الأسية (١ ـ ٢٠) للعدد المركب. برهن المتطابقة المثلثية التالية والتي تسمى متطابقة لاغرانج (Lagrange Identity):

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

حيث إن $0 < \theta < 2\pi$.

استنتج قيمة التعبير التالي:

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$$

١٦ ـ بتطبيق نظرية De Moivere Theorem أثبت أن:

أ ـ $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

ب ـ $\sin 3\theta = 3\cos^2\sin\theta - \sin^3\theta$

١ ـ ٤ القوى والجذور للأعداد المركبة:

لعل من أهم فوائد الشكل القطبي وخاصة الشكل الأسيّ للعدد المركب هـو تسهيل عملية إيجاد قوى وجذور العدد المركب. فإذا فـرضنا أن z عـدد مركب، n عدد صحيح موجب فإن:

$$z^n = \left(|z| e^{i\theta} \right)^n = |z|^n e^{in\theta}$$

ومن ذلك فإن:

$$|z^n| = |z|^n \quad , \quad \arg z^n = n\theta$$

وبالمثل إذا كان العدد n صحيحاً سالباً يكون:

$$|z^n| = |z|^n \quad , \quad \arg z^n = n\theta$$

ولإيجاد الجذر النوني للعدد المـركب نتبع مـرحلتين الأولى إيجـاد الجذر النـوني للعدد 1 ثم تأتي المرحلة الثانية لإيجاد الجذر النوني لأي عدد مركب.

نظرية ٥:

يوجد n من الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة:

$$z^n = 1$$

تسمى جذور الوحدة وهي:

$$(٢٢ ـ ١) \; \ldots . \; z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \quad ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

البرهان:

بتوظيف الشكل الأسي للعدد المركب نستنتج أن:

$$|z|^n e^{in\theta} = 1e^{0i}$$

ومن ذلك ينتج أن $|z|^n = 1$ أي أن $|z| = 1$ وكذلك:

$$n\theta - 0 = 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وهذا يعطي:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

وهذه هي القيم المختلفة للمتغير θ، حيث تكون القيم الأخرى تكراراً لهذه القيم. وتكون هناك n جذراً للعدد المركب 1 هي:

$$z_k = e^{i\theta_k} = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

وقد جرت العادة أن يرمز لهذه الجذور للعدد الواحد بالرموز:

$$1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1} \quad \dots\dots (١ - ٢٣)$$

حيث إن:

$$w_n = e^{\frac{2\pi}{n} \cdot i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

ومن خصائص هذه الجذور هندسياً أنها تقسم دائرة الوحدة إلى n قسم متساوٍ فإذا كان n = 7 فإنها تمثل على دائرة الوحدة كما في الشكل (٦).

النظرية التالية تبحث في الجذور النونية للعدد المركب.

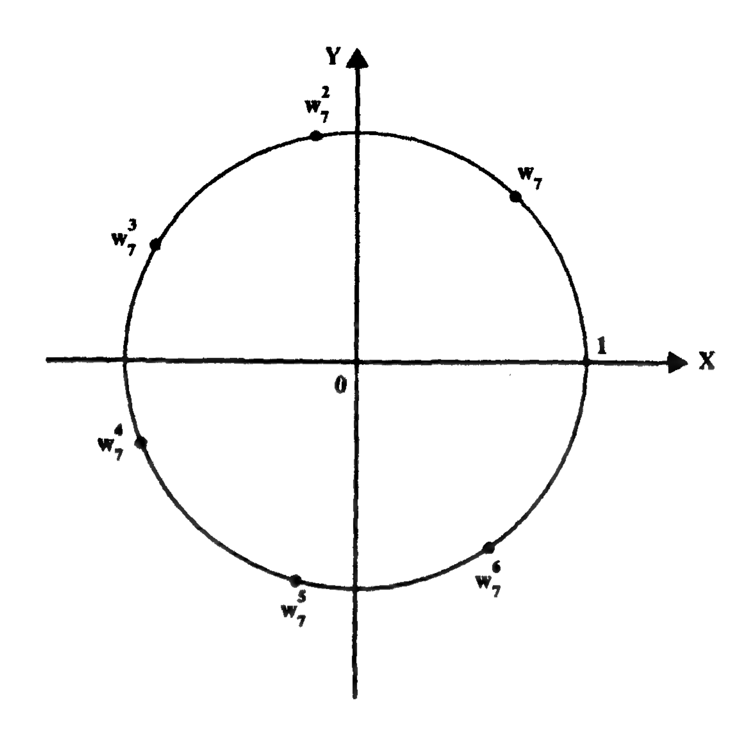
نظرية ٦:

يوجد n جذراً يحقق المعادلة:

$$z = w^{1/n}$$

وهي:

$$z_k = |w|^{1/n} \cdot e^{\frac{\gamma + 2k\pi}{n} i} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \dots\dots (١ - ٢٤)$$



شكل (٦)

حيث إن : $\gamma = \arg w$.

البرهان :

بالمثل نوظف الشكل الأسيّ للعدد المركب للعددين z, w لنحصل على :

$$\left(|z| e^{i\theta} \right)^n = |w| e^{i\gamma}$$

حيث إن $\theta = \arg z$ و $\gamma = \arg w$ ومن ذلك نستنتج أن :

$$|z|^n = |w| \quad , \quad n\theta - \gamma = 2k\pi$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

وبالتالي ينتج أن :

$$|z| = |w|^{1/n} \quad , \quad \theta_k = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

وهذه هي القيم المختلفة للسعة الزاوية θ وباقي قيم k تكون تكراراً لهذه القيم فتكون الجذور المطلوبة هي:

$$z_k = | w |^{1/n} e^{\frac{\gamma+2k\pi}{n} i} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

والعلاقة بين جذور الوحدة وجذور العدد المركب w وثيقة حيث يمكن الحصول على جذور العدد المركب w إذا علم لدينا جذر واحد له مثل z_0 فتكون الجذور الأخرى للعدد w هي:

$$z_0, z_0 w_n, z_0 w_n^2, \ldots, z_0 w_n^{n-1} \quad \ldots. \quad (١ - ٢٥)$$

حيث إن $1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n-1}$ هي جذور الوحدة.

مثـال ١٠:

جد جذور المعادلة:

$$z^5 = 1$$

الحـل:

جـذور المعـادلـة $z^5 = 1$ هي $z = 1^{1/5}$ أي هي الجذور الخمسية للعدد 1 وهي:

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{5} \cdot i} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

وهي كما يلي:

$$z_0 = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5} i} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = e^{\frac{4\pi}{5} i} = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = e^{\frac{6\pi}{5} i} = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = e^{\frac{8\pi}{5} i} = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

مثـال ١١:

جد جذور المعادلة:

$$z^5 = (\sqrt{3} + i)$$

الحــل:

الجذور المطلوبة هي الجذور الخمسيـة للعد المـركب $w = \sqrt{3} + i$ وبتطبيق النظرية السابقة نجد أن:

$$z_k = | w |^{1/5} e^{\frac{\gamma+2k\pi}{5} i} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 2, 4.$$

حيث إن $\gamma = \arg w$. وهي $\gamma = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

$| w |$ القيمة المطلقة للعدد w وهي:

$$| w | = 2$$

وبالتعويض نحصل على الجذور المطلوبة وهي:

$$z_k = 2^{1/5} \cdot e^{\frac{\pi/6 \; + 2k\pi}{5} i} \quad , k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

أي أن:

$$z_0 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} i} \quad , \quad z_1 = 2^{1/5} e^{\frac{13\pi}{30} i}$$

$$z_2 = 2^{1/5} e^{\frac{25\pi}{30} \cdot i} \quad , \quad z_3 = 2^{1/5} e^{\frac{37\pi}{30} i}$$

$$z_4 = 2^{1/5} e^{\frac{49\pi}{30} i}$$

وبمحـاولـة التحقق من (١ ـ ٢٥) نـأخـذ أحـد الجـذور الخمسيـة للعـدد $w = \sqrt{3} + i$ وليكن $z_0 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} \cdot i}$ لنجد بقية الجذور وهي:

$$z_0 = 2^{1/5} \cdot e^{\frac{\pi}{30} i} \quad ,$$

$$z_1 = z_0 w_5 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} i} e^{\frac{2\pi}{5} i} = 2^{1/5} e^{\frac{13\pi}{30} i}$$

$$z_2 = z_0 w_5^2 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} i} e^{\frac{4\pi}{5} i} = 2^{1/5} e^{\frac{25\pi}{30} i}$$

$$z_3 = z_0 w_5^3 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} i} e^{\frac{6\pi}{5} i} = 2^{1/5} e^{\frac{37\pi}{30} i}$$

$$z_4 = z_0 w_5^4 = 2^{1/5} e^{\frac{\pi}{30} i} e^{\frac{8\pi}{5} i} = 2^{1/5} e^{\frac{49\pi}{30} i}$$

مثال ١٢:

جد جذور المعادلة التربيعية:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

حيث إن α, β, γ أعداد مركبة و $\alpha \neq 0$.

الحل:

بالقسمة على α وإكمال المربع نحصل على:

$$z^2 + \frac{\beta}{\alpha} z + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

أي أن:

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد:

$$z = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

وبما أننا نتعامل مع أعداد مركبة حيث يوجد قيمتان للعدد $\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$ متضمنة كجذور تربيعة للعدد $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ وهي:

$$(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}$$

يكون حل المعادلة التربيعية كما يلي:

$$z = \frac{-\beta + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha} \quad \ldots\ldots (١ \text{ - } ٢٦)$$

فمثلاً لإيجاد جذور المعادلة التربيعية:

$$z^2 + (1 + 2i)\, z - (2 - i) = 0$$

نطبق المعادلة (١ - ٢٦) حيث إن $\alpha = 1$، $\beta = 1 + 2i$، $\gamma = -2 + i$ لنحصل على:

$$z = \frac{-1 - 2i + (1 - 4 + 4i + 8 - 4i)^{1/2}}{2}$$

$$= \frac{-1 - 2i + 5^{1/2}}{2}$$

$$= \frac{(-1 \pm \sqrt{5}) - 2i}{2}$$

أي أن الجذرين هما:

$$z_1 = \frac{(-1 + \sqrt{5}) - 2i}{2} \qquad z_2 = \frac{(-1 - \sqrt{5}) - 2i}{2}$$

تمارين ١ - ٤

١ - جد الجذور الثلاثية والثمانية للوحدة ومثلها هندسياً.

٢ - جد الجذور التالية:

أ - $9^{1/2}$ ب - $i^{1/5}$

جـ - $(1 - 2i)^{1/3}$ د - $(1 + \sqrt{3}\, i)^{1/4}$

هـ - $(8i)^{1/7}$ و - $(2 + 2i)^{1/3}$

٣ - أكتب الأعداد المركبة التالية على الصورة $x + yi$:

أ - $(1 - 2i)^3 (2 + i)^2$ ب - $\dfrac{(1 + \sqrt{3})^5}{(2 - 2i)^3}$

جـ - $\dfrac{(8i)^3}{(1 - i)^4}$ د - $\dfrac{(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i)^3}{(1 + i)^2}$

هـ - $(\sqrt{3} - i)^4$ و - $\dfrac{(4 - i)^4}{(1 + i)^3}$

٤ - إذا كانت $1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n-1}$ جذور الوحدة فأثبت أن:

$$1 + w_n + w_n^2 + \ldots + w_n^{n-1} = 0$$

اقتراح: استعن بالتمرين ١٤ من البند السابق.

٥ - جد جذور المعادلات التالية:

أ - $iz^2 + 2z - i = 0$

ب - $z^2 - (2 + 3i)\, z + 3i = 0$

جـ ـ $z^4 + 16 = 0$

د ـ $(z + 1)^3 = z^3$

٦ ـ ليكن z عدداً مركباً غير الصفر. أثبت أن $z^n + \overline{z}^n$ عدد حقيقي لأي عدد صحيح n.

٧ ـ كم جذراً يوجد للمعادلة:

$$z^{3/2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$

ثم جدها.

١ ـ ٥ المستوي المركب:

نقصد بالمستوي المركب أنه مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ أي مجموعة الأزواج المرتبة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وهو المستوى الديكارتي ثنائي الأبعاد. في هذا البند نبحث بعض الخصائص التبولوجية للنقاط وللمجموعات الجزئية لهذا المستوي.

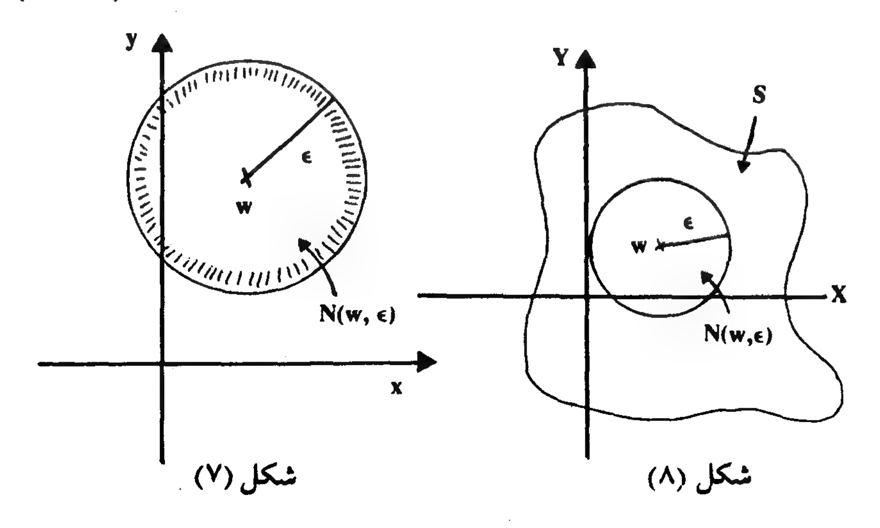
إن الأداة الأساس التي تستخدم في تقديم الخصائص التبولوجية هي فكرة الجوار والتي تعتمد على نقطة وعدد حقيقي موجب ϵ، فإذا رمزنا لفكرة ϵ- جوار للنقطة N (للعدد المركب w) بالرمز $N(w, \epsilon)$ فإنها معرفة بالمساواة التالية:

$$N(w, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \epsilon\} \quad \ldots\ldots (١ ـ ٢٧)$$

وببساطة فإن الجوار هو مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة $|z - w| < \epsilon$ وتسمى جوار مفتوح. وهي تمثل النقط داخل دائرة مركزها w ونصف قطرها ϵ أو هي قرص مركزه w ونصف قطره ϵ.

فإذا كانت S مجموعة جزئية من المستوي المركب $\mathbb{C}$ وكانت $w \in S$ فإن النقطة w تسمى نقطة داخلية للمجموعة S إذا وجد عدد حقيقي $\epsilon > 0$ بحيث إن:

$$N(w, \epsilon) \subset S \quad \ldots\ldots (١ ـ ٢٨)$$



شكل (٧) شكل (٨)

تسمى S مجموعة مفتوحة، إذا تحقق الشرط:

لكل w في S يوجد $\epsilon > 0$ بحيث إن:

$$N(w, \epsilon) \subset S \quad \ldots\ldots (١ - ٢٩)$$

أي إذا كانت كل نقطة w من نقاط المجموعة S نقطة داخلية لها.

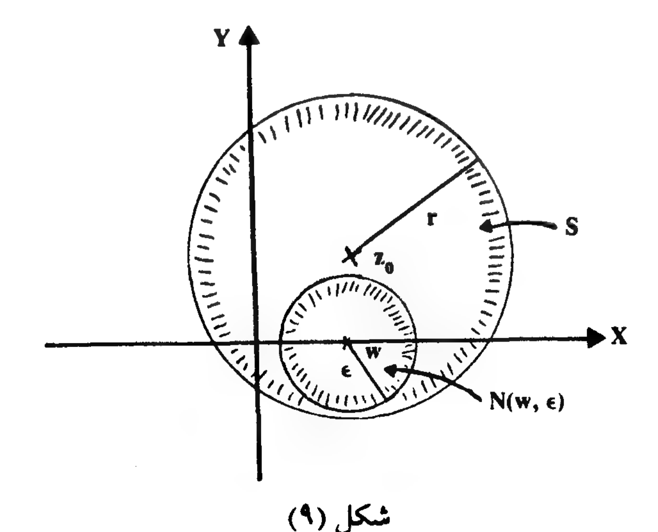
مثـــال ١٣:

لتوضيح الأفكار السابقة نفرض أن المجموعة S هي القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره $r > 0$ أي أن:

$$S = \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < r\}$$

نلاحظ أن كل نقـطة في هذا القـرص هي نقطة داخليـة لأننا نستـطيع إيجـاد جوار لأي نقطة تحتويه المجموعة S لذلك فإن هذه المجموعة مفتوحة.

تسمى النقطة w نقطة خـارجية للمجمـوعة S, $(S \subset \mathbb{C})$ إذا كـانت w نقطة داخليـة لمكملة S وهي $S^c = \mathbb{C} - S$. أما إذا كـانت النقطة w لا تمثـل لا نقطة داخليـة ولا خـارجيـة للمجمـوعـة S فـإنها تسمى نقـطة حـدودية (جبهـويـة) للمجموعة S، وبـالمرمـوز فإن w تسمى نقـطة حدوديـة للمجموعـة S إذا تحقق الشرط التالي:



شكل (٩)

$$N(w, \epsilon) \cap S \neq \phi \wedge N(w, \epsilon) \cap S^c \neq \phi \quad \ldots\ldots (٣٠ - ١)$$

لكل $\epsilon > 0$. أي أن كل قرص مركزه w يحتوي على نقاط من S ونقاط أخرى من S^c.

مجموعة النقاط الحدودية لمجموعة مثل S تسمى حدود S، ويرمز لها بالرمز ∂S.

تكون المجموعة S مغلقة إذا احتوت جميع النقاط الداخلية والحدودية لنفسها. وبلغة أخرى فإن المجموعة S مغلقة إذا كانت S^c مفتوحة.

مثال ١٤:

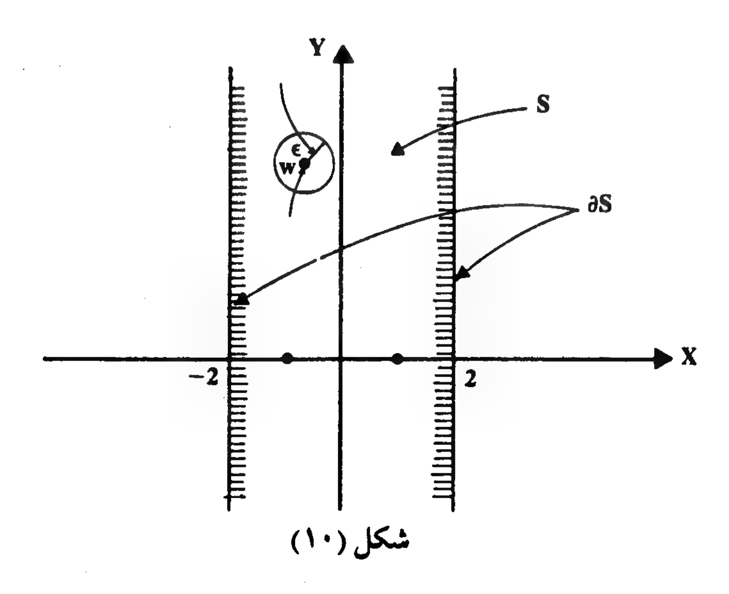
لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة التالية:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \cdot z| \leq 2\}$$

فإن S مجموعة مغلقة لأنها تحتوي على النقاط الداخلية وكذلك النقاط الحدودية حيث إن حدود S هي المجموعة:

$$\partial S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \cdot z| = 2\}$$

والمجموعة S ممثلة بالشريحة اللانهائية التالية:



شكل (١٠)

ولإثبات أن S تحتوي على نقاطها الداخلية نفرض أن w في S وبالتالي فإن:

$$| Re \cdot w | \leq 2$$

فإذا فرضنا أن: $\quad | Re \cdot w | \quad \frac{1}{4} = \epsilon$ فإن:

$$N (w, \epsilon) \subset S$$

مثـال ١٥:

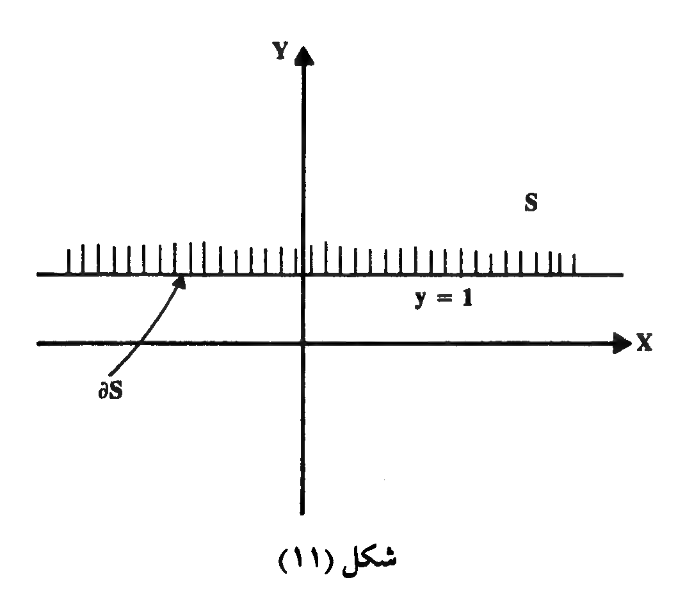
لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة:

$$S = \{z \in \mathbb{C}: Im \cdot z > 1\}$$

فـإن S مجموعـة مفتوحـة وتسمى نصف المستـوي الـذي يعلو الخط المستقيم $y = 1$ أما حدود هذه المجموعة فهي المجموعة:

$$\partial S = \{z \in \mathbb{C}: Im \cdot z = 1\}$$

أو هي الخط المستقيم $y = 1$ كما في الشكل (١١).



شكل (١١)

ولإثبـات أن S مفتوحـة أي تحتوي عـلى نقاطهـا الـداخليـة فقط نفـرض أن $w \in S$ وبالتالي فإن $Im \cdot w > 1$.

فإذا فرضنا أن:

$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \cdot (w - i) > 0$ فإن: $N(w, \epsilon) \subset S$ لكل $\epsilon < \epsilon_0$

لأنه إذا كان $z \in N(w, \epsilon)$ فإن $|z - w| < \epsilon$ وبالتالي يكون $-\epsilon < \operatorname{Im} \cdot (z - w) < \epsilon$ لنستنتج أن:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \cdot z = \operatorname{Im} \cdot (z - w) + \operatorname{Im} \cdot w &> -\epsilon \\
&> -\epsilon_0 + \operatorname{Im} \cdot w = \\
&> -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \cdot (w - i) + \operatorname{Im} \cdot w \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \cdot w > 1
\end{aligned}$$

لذلك فإن: $z \in S$.

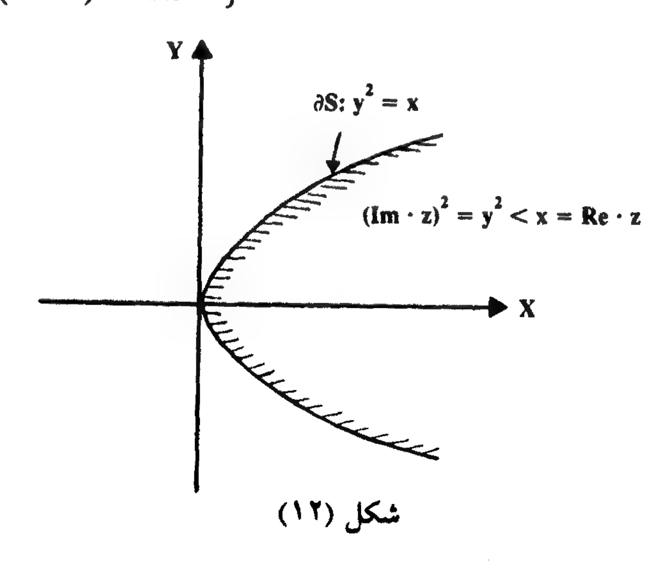
مثـال ١٦:

لتكن S المجموعة المعرفة بالمساواة:

$$S = \{z \in \mathbb{C}: (\operatorname{Im} \cdot z)^2 \leqslant \operatorname{Re} \cdot z\}$$

فإن S مجموعة مغلقة لأنها تحتوي على نقاطها الداخلية:

$$\{z \in \mathbb{C}: (\operatorname{Im} \cdot z)^2 < \operatorname{Re} \cdot z\}$$



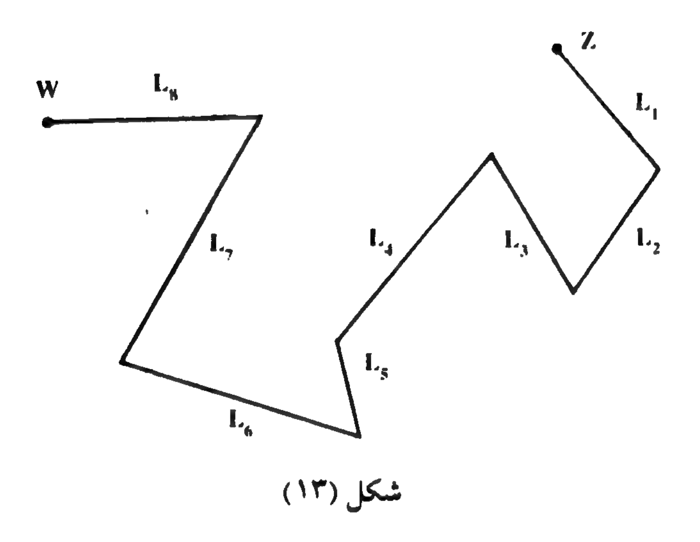
شكل (١٢)

وكذلك تحتوي جميع نقاطها الحدودية:

$$\partial S = \{z \in \mathbb{C}: (Im \cdot z)^2 = Re \cdot z\}$$

هذه المجموعة تمثل بيانياً كما في الشكل (١٢):

الخط المضلع الذي يصل بين نقطتي z و w نعني به أنه مجموعة منتهية من القطع المستقيمة $L_1, L_2, \dots, L_n$ المتصلة مع بعضها البعض نهاية الأول مع بداية الثاني بدءاً بالنقطة z وانتهاء بالنقطة w، كما في الشكل (١٣) التالي:



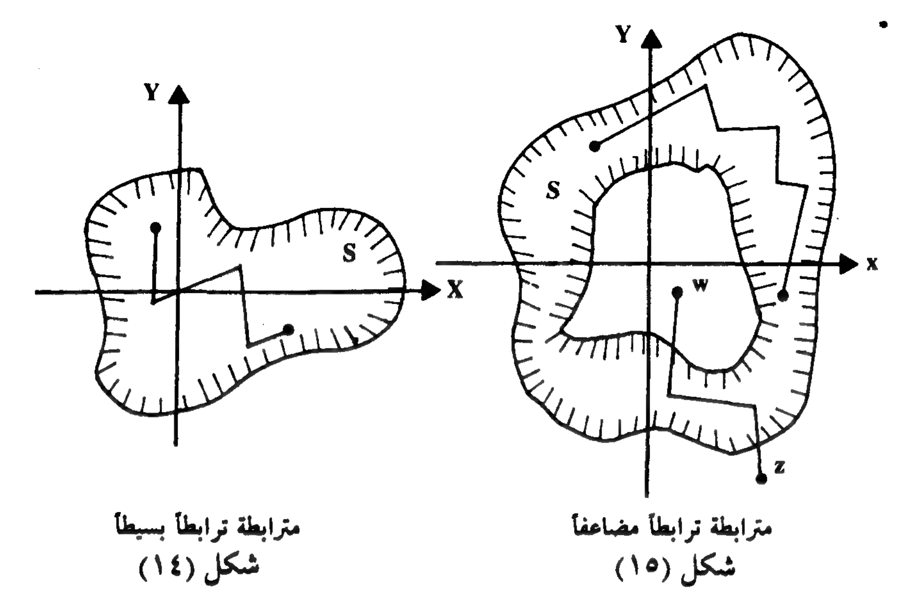
شكل (١٣)

إذا فرضنا أن S مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ فإن S تسمى مجموعة مترابطة Connected إذا تحقق الشرط التالي:

لكل نقطتين z و w في S يوجد خط مضلع ينتمي للمجموعة S يصل بين النقطتين z و w .... (١ - ٣١)

فإذا كانت مكملة S وهي S^c مترابطة كذلك فإن S تسمى مترابطة ترابطاً بسيطاً أما إذا كانت المكملة S^c ليست مترابطة فإن S مترابطة ترابطاً مضاعفاً، أنظر الشكلين (١٤ و١٥):

في الشكل (١٤) نلاحظ أن S^c مترابطة كذلك، لذلك فإن S تسمى مجموعة



متراربطة ترابطاً بسيطاً
شكل (١٤)

مترابطة ترابطاً مضاعفاً
شكل (١٥)

مـترابطة تـرابطاً بسيـطاً (Simply Connected) ولكن المجموعـة S^c في الشكـل (١٥) ليست مترابطة لعـدم إمكانيـة ربط كل نقـطتين z و w في S^c بخط مضلع تحتويه S^c (أي دون المرور في S)، لذلك فإن المجموعة S تسمى مترابطة تـرابطـاً مضاعفاً (Multiply Connected).

المجموعة المفتوحة والمترابطة S تسمى مجـالاً، المجموعـة S تسمى منطقـة إذا كانت مجالاً وتحتوي أو لا تحتوي جزءاً من أو كل نقاطها الحدودية.

المجموعة S تسمى مجموعة محدودة إذا وجد قرص نصف قطره R:

$$S \subset \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}, \quad 0 < R < \infty$$

وإذا لم تكن S مجموعة محدودة فإنها تسمى غير محدودة.

أي مجمـوعة جـزئية مغلقـة ومحدودة من $\mathbb{C}$ تسمى مجمـوعة مـتراصة. تسمى النقـطة w نقطة تجمـع للمجمـوعـة S (لاحظ أنـه ليس هنـاك شرط بـانتـماء w للمجموعة S) إذا تحقق الشرط التالي:

كل جوار $N(w, \epsilon)$ للنقطة w يحتوي على الأقل نقطة واحدة z في S بحيث إن

$$z \neq w \quad \ldots\ldots (١ - ٣٢)$$

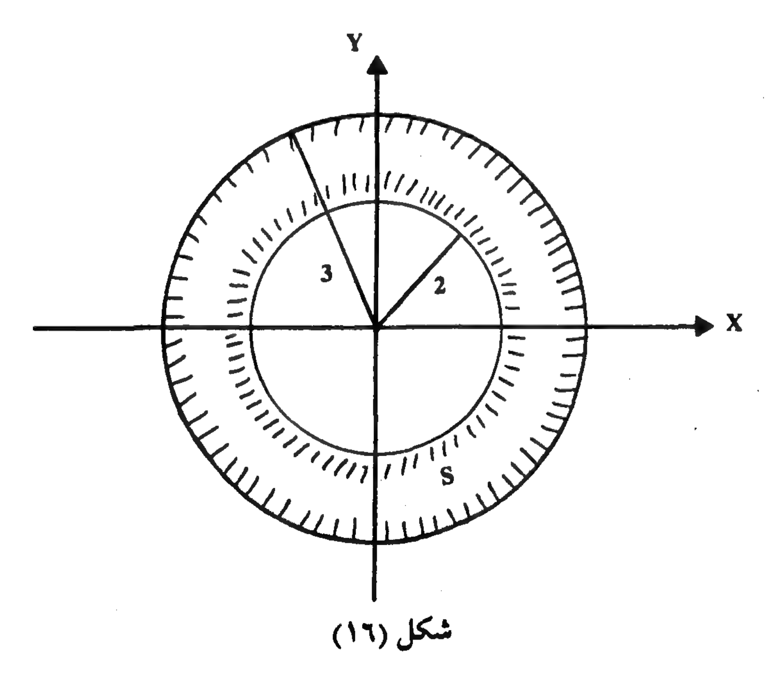
مثـال ١٧ :

لتكن المجموعة S معرفة بالمساواة :

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| \leqslant 3\}$$

والتي يمكن تمثيلها بيانياً بالشكل (١٦).

هـذه المجموعـة تسمى حلقة (Annulus) نصف قـطرها الـداخلي 2 ونصف قطرها الخارجي 3. هذه المجموعة تحتوي نقاطها الداخلية ولكن حدودها مكوّنة من الدائرتين الصغرى والكبرى وهي تحتوي نقاطها الحدودية من الدائرة الكبرى ولا تحتـوي نقاطهـا الحدوديـة من الدائـرة الصغرى لـذلك فهي ليست مفتـوحة وكـذلك ليست مغلقـة. من السهل إدراك أنها مـترابطة فهي منـطقـة وكـذلـك محدودة، ولكنها مترابطة ترابطاً مضاعفاً لأن مكملتها ليست مترابطة.



شكل (١٦)

مثـال ١٨ :

نصف المستوي المفتوح هو مجموعة النقاط التي تقع على جهة واحدة من خط مستقيم مثل :

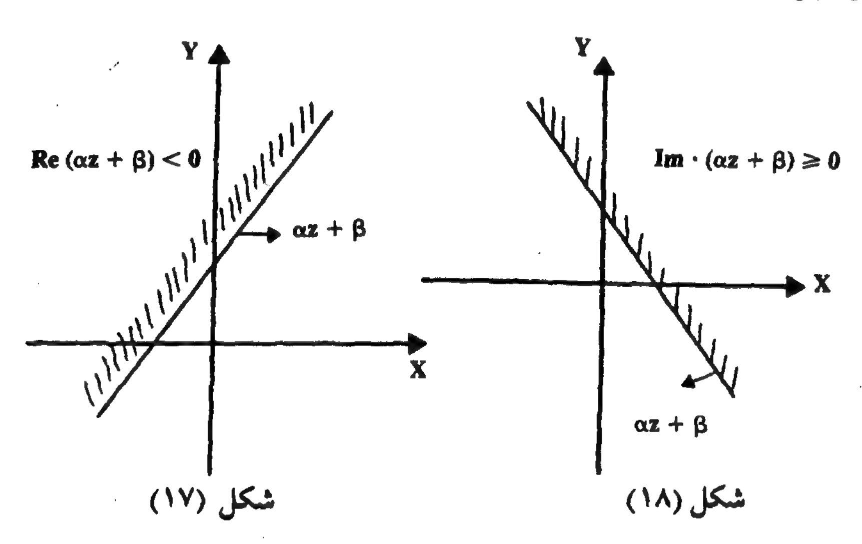
$$\{z \in \mathbb{C}: \text{Re} \cdot (\alpha z + \beta) < 0\}$$

ونصف المستوي المغلق هو مجموعة النقاط التي تقع على خط مستقيم أو على جهة واحدة منه مثل:

$$\{z \in \mathbb{C}: \text{Im} \cdot (\alpha z + \beta) \geq 0\}$$

وفي الحالتين فإن الخط المستقيم $\alpha z + \beta$ يمثل النقاط الحدودية لنصف المستوي. انظر (الشكل ١٧ والشكل ١٨).

كما أن نصف المستوي المفتوح مترابط وبالتالي فإنه مجال ولكن نصف المستوي المغلق فهو منطقة.



شكل (١٧)　　　　شكل (١٨)

مثـال ١٩:

جد نقط التجمع للمجموعة S حيث:

$$S = \left\{ (-1)^n \ \frac{n+1}{n} \cdot i : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

الحـل:

بدراسة عناصر المجموعة S نجد أنها:

$$S = \left\{-2i, \ \frac{3}{2} \ i, \ \frac{-4}{3} \ i, \ \frac{5}{4} \ i, \ldots \right\}$$

بملاحظة أن المجموعة يمكن أن ينظر إليها كإتحاد مجموعتين مختلفتين حيث إن: $S = S_1 \cup S_2$

$$S_1 = \left\{-2i,\ \frac{-4}{3}\ i,\ \frac{-5}{6}\ i, \ldots\right\}$$

$$S_2 = \left\{\frac{3}{2}\ i,\ \frac{5}{4}\ i,\ \frac{7}{6}\ i, \ldots\right\}$$

نلاحظ أن مجموعة النقاط الأولى من S تتجمع حول النقطة i− ولكن مجموعة النقاط الثانية تتجمع حول النقطة i ويمكن تطبيق تعريف نقطة التجمع لنستنتج أن نقاط التجمع للمجموعة S هي المجموعة:

$$\{-i\ ,\ i\}$$

لاحظ أن نقطة النهاية لأي متتالية تمثل نقطة تجمع ولكن ليس صحيحاً بالضرورة أن نقطة التجمع تمثل نقطة نهاية.

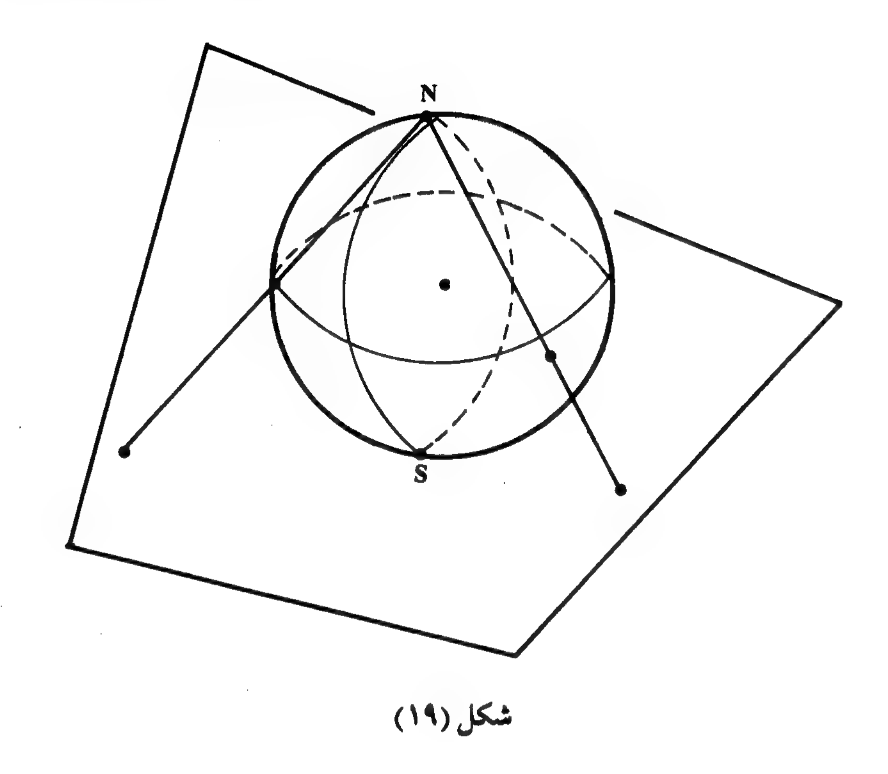
لعله من المفيد أن نضيف إلى المستوي المركب $\mathbb{C}$ نقطة عند اللانهاية يرمز لها بالرمز ∞ لنحصل على ما يسمى المستوي المركب الممدد. ومن أجل أن نفهم هذه النقطة دعنا ندرس الإسقاط التجسيمي التالي (Stereographic Projection):

لنفرض أن كرة نصف قطرها الوحدة موضوعة على المستوي المركب بحيث إن القطب الجنوبي للكرة يقع على نقطة الأصل للمستوي المركب نستطيع تعريف تناظر واحد لواحد بين نقاط سطح الكرة ما عدا القطب الشمالي N ونقاط المستوي المركب وذلك بتعريف، صورة النقطة z في المستوي بأنها تلك النقطة w والتي تمثل تقاطع سطح الكرة مع المستقيم الواصل بين N والنقطة z انظر الشكل (١٩) وهنا يمكن تعريف صورة القطب الشمالي N بنقطة في اللانهاية والتي رمزنا لها بالرمز ∞، وفي هذه الحالة تسمى $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ كرة ريمان (Reimann Shpere). ويمكن تعريف جوار هذه النقطة ∞ بالمساواة التالية:

$$N(\infty, \epsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\epsilon}\right\}$$

حيث $0 < \epsilon$. أي أن جوار النقطة ∞ هو مجموعة النقاط الخارجية للقرص المغلق:

$$\{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant \frac{1}{\epsilon}\}$$



شكل (١٩)

تمارين ١ ـ ٥

ابحث في خصائص المجموعات المعرفة في التمارين (١ ـ ١٠) من حيث كونها مفتوحة أم مغلقة، مترابطة، متراصة، محدودة، مجال أو منطقة. ثم مثلها بيانياً:

١ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 3\}$

٢ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: 1 \leqslant |z| < 3\}$

٣ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: |z - i| \geqslant 3\}$

٤ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z \leqslant \pi/6\}$

٥ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: x^2 \leqslant y\}$

٦ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: |\text{Re} \cdot z| < 2\}$

٧ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: |\text{Arg}\, z| < \pi/2\}$

٨ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: |\text{Im} \cdot z| \leqslant 1\}$

٩ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: \text{Re} \cdot (2z + i - 1) \geqslant 1\}$

١٠ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im} \cdot (iz + 1 - 2i) < 2\}$

١١ ـ بيِّن أن مسار المعادلة:

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$

عبارة عن خط مستقيم عمودي ومنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين α و β.

١٢ ـ بيِّن أن مسار المعادلة:

$$|z - \alpha| = k\,|z - \beta|$$

عبارة عن دائرة.

اقتراح: حوِّل إلى الإحداثيات المستطيلة (الكارتيزية).

١٣ ـ ابحث في الخصائص التبولوجية للمجموعة:

$$S = \{z \in \mathbb{C}: |z - \alpha| < k\ |z - \beta|\}$$

١٤ ـ يقال إن المجموعة S محدبة إذا تحقق الشرط:

لكل w, z في S فإن القطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواة في S. أي أن $tw + (1 - t)z \in S$ لكـل t في [0, 1]. أثبت أن نصف المستوي محدب، خذ مثالاً نصف المستوي المعرفة بالمعادلة:

$$\mathrm{Re} \cdot (iz - 1 + 3i) > 0$$

١٥ ـ بيِّن أن مسار النقطة التي تحقق المعادلة:

$$|z - r| = k\,(\mathrm{Re} \cdot z) \quad , \quad k, r > 0$$

يأخذ:

أ ـ شكل قطع ناقص إذا كانت $0 < k < 1$

ب ـ قطع مكافىء إذا كان $k = 1$

جـ ـ قطع زائد إذا كانت $1 < k < \infty$

١٦ ـ جد مجموعة نقاط الحدود وكذلك نقاط التجمع للمجموعات التالية:

أ ـ $S = \{(-i)^n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$

ب ـ $S = \{\frac{i}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$

جـ ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z < \pi/4\}$

د ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} \cdot \left(\frac{1}{z}\right) \leq 2\}$

هـ ـ $S = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re} \cdot z^2 > 0\}$

١٧ ـ بيِّن أنه إذا احتوت المجموعة S جميع نقاط التجمع لها فإنها مغلقة.

١٨ ـ أعط مثالاً يبيِّن أن نقطة التجمع لمجموعة ما لا تنتمي لها. ومثالاً آخر تكون نقطة التجمع تنتمي لها.

١٩ ـ بيِّن أنه إذا كانت S مجالاً فإن كل نقطة داخلية للمجموعة S تكون نقطة تجمع لها.

٢٠ ـ بيِّن أنه إذا تكونت المجموعة S من عدد منتهٍ من النقاط فلا يوجد نقاط تجمع لها.

الفصل الثاني

الدوال التحليلية

ANALYTIC FUNCTIONS



الفصل الثاني

الدوال التحليلية
Analytic Function

٢ ـ ١ الدوال المركبة:

إن فكرة العدد المركب التي أوجدت حلولاً لبعض المعادلات الجبرية يمكن أن تلعب دوراً آخر أكثر أهمية خاصة في بعض التطبيقات الفيزيائية، ذلك أنه يمكن تعريف فكرة الدالة المركبة والتي يبرز من بينها نوع هام لتلك التطبيقات هي الدوال التحليلية.

لعلنا نذكر أن فكرة الدالة f هي قانون يؤثر على عناصر مجموعة X ويحولها إلى عناصر في مجموعة Y بحيث إن لكل x في X هناك قيمة واحدة وواحدة فقط y في Y تسمى صورة x أو:

$$(١ - ٢) \quad \ldots . \quad y = f(x)$$

أما الدالة المركبة فهي تخصيص لذلك العموم، حيث إن f دالة مركبة إذا كانت f قانوناً يعيّن لكل عدد مركب z في مجموعة جزئية D من $\mathbb{C}$ عدداً مركباً واحداً ووحيداً w يسمى صورة z ويكتب كما يلي:

$$(٢ - ٢) \quad \ldots . \quad w = f(z)$$

إن المجموعة D التي تحتوي كل الأعداد المركبة z التي تكون صورتها f(z) معرفة (أي عدداً مركباً) تسمى مجال تعريف الدالة وكذلك فإن المجموعة R التي تحتوي كل الأعداد المركبة التي يمكن أن تكون صورة لواحد أو أكثر من

الأعداد المركبة z في D تسمى مدى الدالة f أو صورة الدالة f.

نلاحظ أن العدد المركب z الذي يمثل المتغير المستقل للدالة عبارة عن نقطة في المستوي المركب (ثنائي الأبعاد) ويحدّد بالمتغيرين (x, y) وكذلك العدد المركب w الذي يمثل المتغير التابع $w = f(z)$ للدالة f عبارة عن نقطة في المستوي المركب (ثنائي الأبعاد) ويحدد بالمتغيرين (u, v)، ولعل هذا ما يبرز بعض المفارقات بين الدالة الحقيقية التي ألف القارىء دراستها وبين الدالة المركبة. مثل هذه المفارقات عدم إمكانية إعطاء رسم سهل التخيل كما هو الحال في الدوال الحقيقية ولكن هذا لا يمنع من وصف تأثير الدالة على مجالها، هذا الوصف يتطلب دراسة تأثير الدالة على الخط المستقيم أو الدائرة أو الشريحة في مجال تعريفها، وان هذه الدراسة ليست سهلة الاستيعاب في كثير من الأحيان.

ومن المفارقات كذلك إمكانية تمثيل الدالة المركبة بزوج من الدوال الحقيقية ذات متغيرين، ذلك لأن:

$$w = f(z) = u + vi = f(x + yi)$$

ومن ذلك نستنتج كلاً من $u(x,y)$ و $v(x,y)$ كما يوضح ذلك الأمثلة التالية:

مثـال ١:

إذا كانت $f(z) = z^3$ فإن مجال هذه الدالة D هو مجموعة الأعداد المركبة، وكذلك مداها، لإيجاد الدالتين $v(x, y)$ و $u(x, y)$ نقول:

$$u + vi = f(z) = z^3 = (x + yi)^3$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$$

ومن ذلك فإن:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$
$$v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

وتسمى الدالة u بأنها Re ∘ f وتسمى الدالة v بأنها Im ∘ f.

مثـال ٢ :

إذا كانت $f(z) = x^2 - 2y^2 i$ فإنه يمكن لهذه الدالة أن تكتب بدلالة المتغير z، ذلك إذا تذكرنا أن :

$$x = \mathrm{Re} \cdot z = \frac{1}{2}\,(z + \bar{z}) \;,\; y = \mathrm{Im} \cdot z = \frac{1}{2i}\,(z - \bar{z})$$

وبالتعويض في الدالة f نجد أن :

$$\begin{aligned} f(z) &= (\mathrm{Re} \cdot z)^2 - 2\,(\mathrm{Im} \cdot z)^2 \cdot i \\ &= \frac{(z + \bar{z})^2}{4} + \frac{(z - \bar{z})^2}{2}\, i \\ &= \frac{1}{4}\,\{z^2 + 2\,z\,\bar{z} + \bar{z}^2\} + \frac{1}{2}\, i\,\{z^2 - 2\,z\,\bar{z} + \bar{z}^2\} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, i\right) z^2 + \left(\frac{1}{2} - i\right) z\,\bar{z} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, i\right) \bar{z}^2 \\ &= \alpha\, z^2 + \beta\, z\,\bar{z} + \gamma\,\bar{z}^2 \end{aligned}$$

حيث إن :

$$\alpha = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, i\right) \;,\; \beta = \left(\frac{1}{2} - i\right) \;,\; \gamma = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, i\right)$$

لعله من المفيد دراسة بعض الدوال دراسة أكثر تفصيلاً، مثل التحويلات التالية : الانسحاب، الدوران، والانعكاس.

مثـال ٣ : الانسحاب :

الانسحاب هو دالة معرفة بالمساواة :

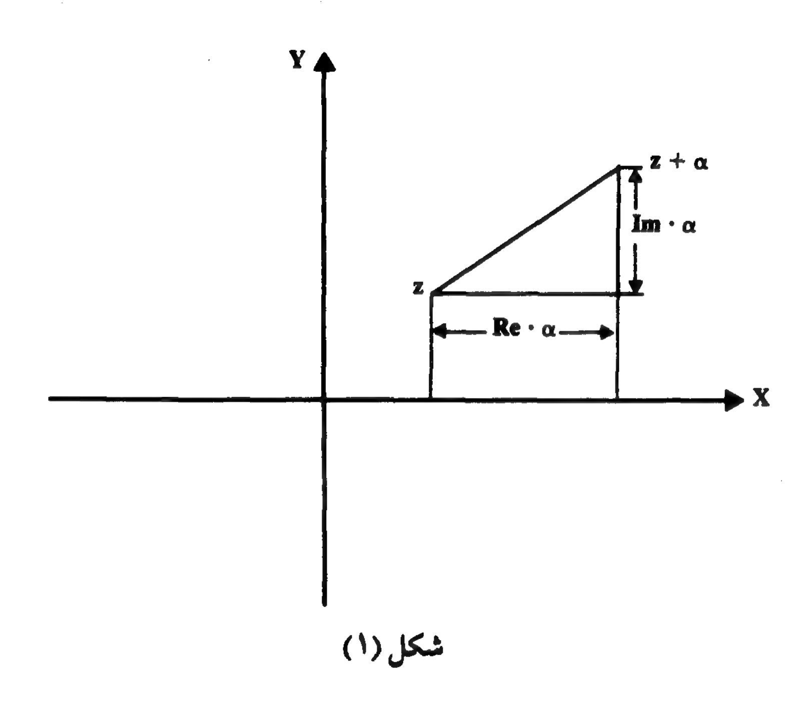
$$w = f(z) = z + \alpha = (x + \mathrm{Re} \cdot \alpha) + i(y + \mathrm{Im} \cdot \alpha)$$

حيث إن α عدد مركب. أن مجال هذه الدالة هو $\mathbb{C}$ وكذلك مداها. وتأثيرها على مجالها أنها تسحب كل عدد (حقيقي) مركب z بمقدار واتجاه العدد المركب

أي أن x تسحب بمقدار $Re \cdot \alpha$ وكذلك y تسحب بمقدار $Im \cdot \alpha$ ويكون التأثير انسحاباً بمحصلة الانسحابين الحقيقيين $Re \cdot \alpha$، $Im \cdot \alpha$ شكل رقم (١).

ويمكن ملاحظة أن الدالة العكسية لها هي

$$z = f^{-1}(w) = w - \alpha$$



شكل (١)

مثــال ٤ : الدوران:

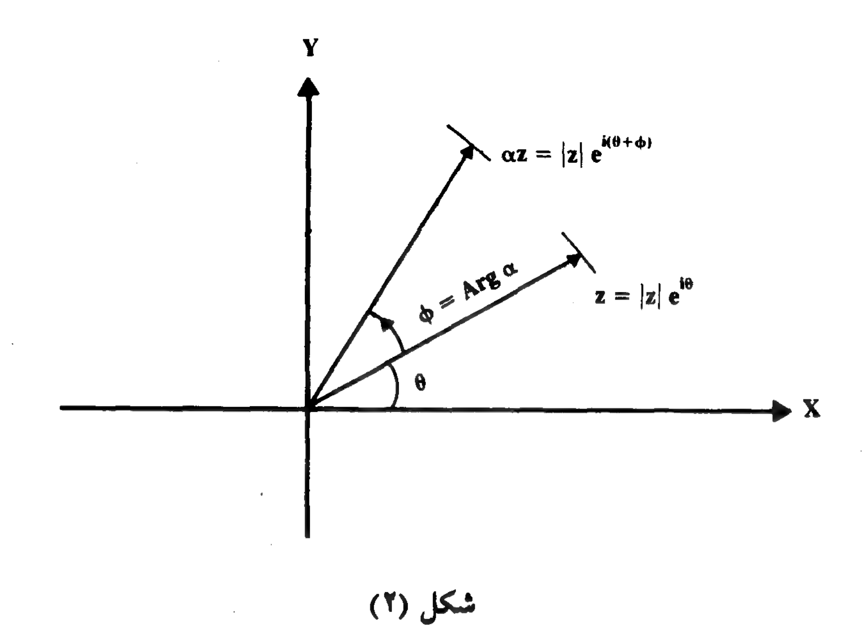
الدوران هو دالة معرفة بالمساواة:

$$w = f(z) = \alpha \cdot z$$

حيث إن α عدد مركب يقع على دائرة الوحدة أي أن $|\alpha| = 1$. أن مجال هذه الدالة هو $\mathbb{C}$ وكذلك مداها، كما أن الدالة العكسية هي:

$$z = f^{-1}(w) = \bar{\alpha}\, w$$

وتأثيرها هو دوران عكس عقارب الساعة بزاوية مقدارها $\phi = Arg\, \alpha$، انظر الشكل رقم (٢).



شكل (٢)

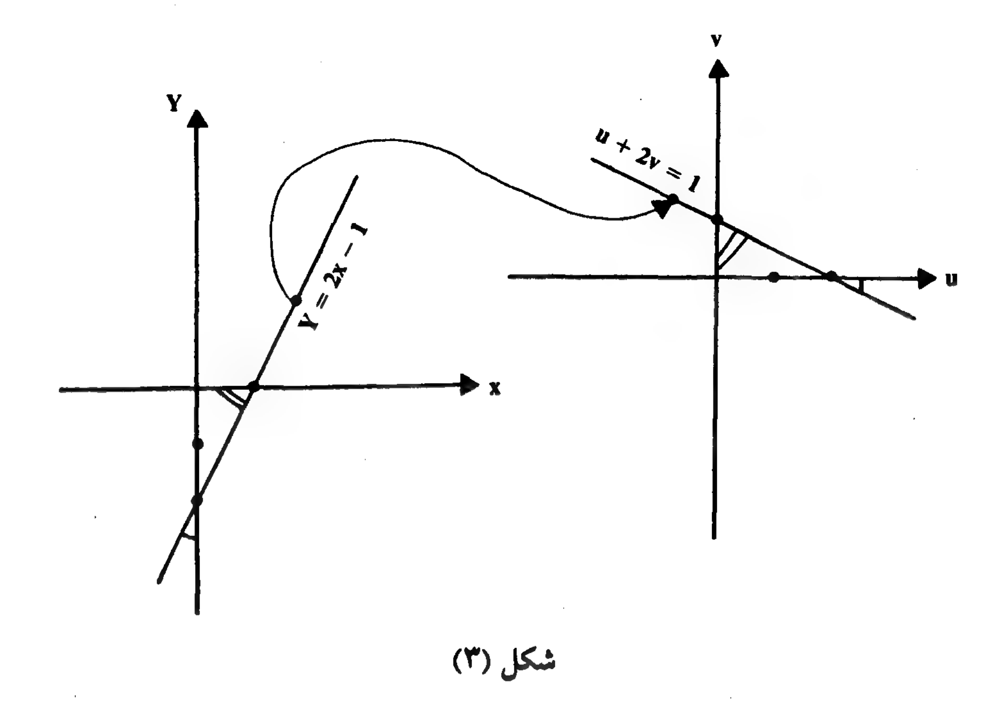
فإذا كانت $\alpha = i$ فإن سعة الدوران هي $\text{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$ ولمعرفة تأثير هذا الدوران على الخط المستقيم الذي يقع في مجالها $y = 2x - 1$ مثلاً فإن صورة هذا الخط المستقيم هو تدوير له بمقدار $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة وبالتحليل فإن:

$$w = f(z) = iz = -y + xi = u + vi$$

ومن ذلك ينتج أن $u = -y$ و $v = x$ وبالتعويض بدلاً من x و y في معادلة المستقيم $y = 2x - 1$ نحصل على:

$$-u = 2v - 1$$

أي أن صورة $y = 2x - 1$ هي الخط المستقيم $u + 2v = 1$. لاحظ أخيراً أن الدوران يحافظ على الزوايا، أنظر الشكل (٣).



شكل (٣)

مثــال ٥ : الانعكاس :

أما الإنعكاس فهو معرف بالمساواة :

$$w = f(z) = \bar{z}$$

ومجـاله هـو $\mathbb{C}$ وكذلـك مداه وتـأثيره أنـه ينقل النصف العلوي من المستـوي المـركب إلى النصف السفلي منـه والعكس أيضاً بـالعكس أما الـدالـة العكسيـة فهي :

$$z = f^{-1}(w) = \overline{w}$$

ننوّه هنا أنه من المفيد استخدام الشكل القطبي للعدد المركب للحصول عـلى الشكل القطبي للدالة المركبة $w = f(z) = u + vi$ حيث تصبح :

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

هذه الفكرة يوضحها المثال التالي :

مثــال ٦:

إذا كانت $f(z) = \alpha z$ فإن:

$$w = f(re^{i\theta}) = |\alpha| e^{i\phi} |z| e^{i\theta} = |\alpha| |z| e^{i(\theta+\phi)}$$

حيث إن $|z| = r$, $\phi = \operatorname{Arg} \alpha$ ومن ذلك ينتج:

$$w = |\alpha| |z| \left(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)\right)$$

ومنها فإن:

$$u(r, \theta) = |\alpha| r \cos(\theta + \phi),$$
$$v(r, \theta) = |\alpha| r \sin(\theta + \phi).$$

لاحظ أن تأثير هذه الدالـة على مجـالها هـو دوران بمقدار $\phi = \operatorname{Arg} \alpha$ عكس عقـارب الساعـة بالإضـافة إلى تكبـير أو تصغـير لمقيـاس المتغـير z حسب كـون $1 < |\alpha|$ أو $|\alpha| < 1$.

تمارين ٢ ـ ١

١ ـ أكتب الدوال التالية على الصورة $w = u(x, y) + iv(x, y)$:

أ ـ $f(z) = 2z^2 - 3z + i$

ب ـ $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

جـ ـ $f(z) = \dfrac{z-i}{z+4}$

د ـ $f(z) = |z|$

هـ ـ $f(z) = 2i\bar{z}$

و ـ $f(z) = \operatorname{Arg}(z^2)$.

٢ ـ جد مجال تعريف كل دالة في التمرين السابق.

٣ ـ اكتب الدوال التالية بدلالة z و $\bar{z}$.

أ ـ $w = x^2 + y^2 - 2xy + i(x - xy)$

ب ـ $w = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

٤ ـ عرّف الدالة f بالمساواة:

$$f(z) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{y} i$$

أ ـ جد مجال تعريف f.

ب ـ بيِّن أن f تتوافق مع الدالة:

$$g(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) + i\left(\int_0^{\infty} e^{-yt}\,dt\right)$$

في المجال $-1 < Re \cdot z < 1$ و $Im \cdot z > 0$

٥ ـ جد صورة المجموعة $S = \{z : 0 < |z| < 1\}$ تحت الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

٦ ـ لتكن الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = (2 + i) z + (1 - 2i)$$

جد f(S) في الحالات التالية:

أ ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : Re \cdot z \leq 1\}$

ب ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : y = 1 + 2x\}$

جـ ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\}$

د ـ $S = \{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = 4\}$

٢ ـ ٢ النهاية والاتصال:

لا شك أن فكرة النهاية تلعب دوراً رئيسياً في الرياضيات عامة والتحليل خاصة سواء التحليل الحقيقي أم المركب، لذلك لا بد من لفت انتباه القارىء لأهمية هذه الفكرة أولاً ثم لدقتها ثانياً. التعريف التالي يبيّن مفهوم النهاية للدالة المركبة.

تعريف ١:

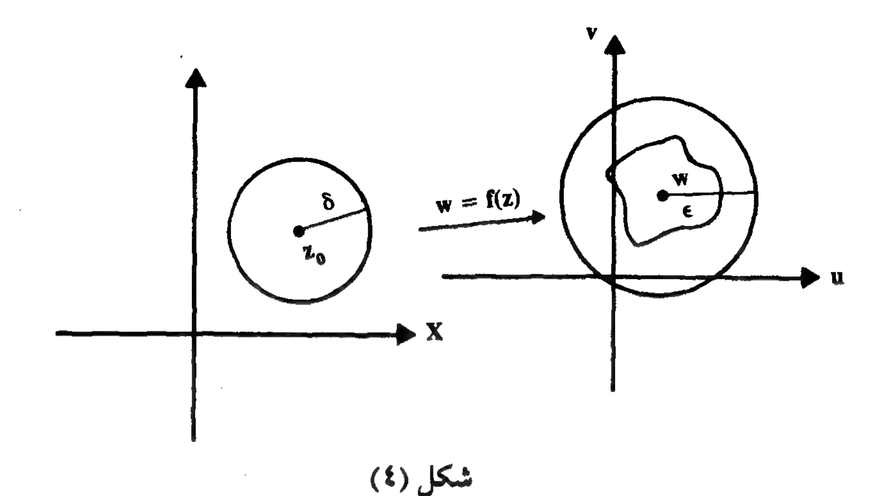
لتكن f دالة مركبة معرفة على جوار للنقطة z_0 ما عدا احتمالاً z_0 نفسها. إذا كان w_0 عدداً مركباً فإن $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط التالي: لكل عدد حقيقي $0 < \epsilon$ يوجد عدد حقيقي $0 < \delta$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon \quad \ldots\ldots (٢ - ٣)$$

هذا التعريف يشبه تعريف نهاية الدالة الحقيقية شكلاً ولكن بالتدقيق والتأمل بالجمل المكوّن منها هذا التعريف نستنتج بعض المفارقات، إن الجملة $|z - z_0| < \delta$ تمثل قرصاً مركزه z_0 ونصف قطره δ في حين أن نفس الجملة في الدالة الحقيقية كانت تمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ. وقل نفس الشيء بالنسبة للجملة $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

إن هذا الفرق يُفقد فكرتي النهاية من اليمين ومن اليسار معناهما ذلك أنه في حالة الفترة التي مركزها x_0 ونصف قطرها δ يكون اقتراب المتغير x من x_0 على مسارين اثنين لا ثالث لهما ولكن في حالة القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره δ فإن اقتراب المتغير z من z_0 يكون بمسارات عددها لا نهائي لذلك لم يعد هناك معنى للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى.

الأمثلة التالية توضح كيفية استخدام التعريف لإثبات النهاية.



شكل (٤)

مثـــال ٧ :

إذا كانت $f(z) = x + (x + 2y)\,i$ فبيِّن باستخدام التعريف ١ أن :

$$\lim_{z \to i} f(z) = 2i$$

الحــل :

لتكن $\epsilon > 0$، علينا أن نجد علاقة بين ϵ و δ بحيث إن :

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$$

لذلك نفرض أن $|z - i| < \delta$ وبالحساب فإن :

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |x + (x + 2y)\,i - 2i| \\ &= |x + (x + 2y - 2)\,i| \end{aligned}$$

ومن الفرض $|z - i| < \delta$ نستنتج أن :

$$|z - i| = |x + (y - 1)\,i| < \delta$$

ومن هذا ينتج أن :

$$|x| < \delta \quad , \quad |y - 1| < \delta$$

وعليه فإن:

$$|f(z) - w_0| = |x + (x + 2y - 2)i|$$
$$\leq 2|x| + 2|y - 1| < 4\delta$$

فإذا اخترنا قيمة δ تحقق الشرط $\epsilon \leq 4\delta$ فإن العلاقة المطلوبة هي $\delta \leq \frac{1}{4}\epsilon$.

مثال ٨:

بيِّن باستخدام التعريف أن:

$$\lim_{z \to 2i} z^2 = -4$$

الحل:

نفرض أن $\epsilon > 0$ لنبحث عن علاقة بين ϵ وعدد حقيقي δ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$$

لذلك نفرض أن $|z - 2i| < \delta$ ومن ذلك ينتج أن:

$$|f(z) - w_0| = |z^2 + 4| = |(z - 2i)(z + 2i)|$$
$$= |z - 2i|\,|z - 2i + 4i|$$
$$\leq |z - 2i|\left(|z - 2i| + |4i|\right)$$
$$< \delta(\delta + 4)$$
$$< \delta^2 + 4\delta.$$

فإذا فرضنا أن $\delta < 1$ فإن $\delta^2 < \delta$ ولذلك فإن:

$$|f(z) - w_0| < \delta^2 + 4\delta < 5\delta$$

فإذا فرضنا أن $5\delta < \epsilon$ فإن $\delta \leq \frac{1}{5}\epsilon$ ومن ذلك فإن:

$$\delta \leq \min \cdot \left\{1, \frac{1}{5}\epsilon\right\}$$

هي العلاقة التي تحقق الشرط (صغرى = .min).

إن الملاحظة التي ذكرت تعقيباً على تعريف (١) تفيدنا في حالة إثبات أن قيمة نهاية دالة ما غير موجودة لوجود قيم مختلفة للنهاية عندما يقترب المتغير z من z_0 بطرق مختلفة، ذلك لأن النهاية إن وجدت فإن قيمتها واحدة ووحيدة (انظر تمرين ٢٢).

المثال التالي يوضح ذلك.

مثـال ٩:

لتكن الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$$

فبيِّن أن $\lim_{z \to z_0} f(z)$ غير موجودة.

الحـل:

نبحث عن قيمة النهاية بفرض اقتراب المتغير z من z_0 بمسارين مختلفين فإذا وجدنا قيمتين مختلفتين للنهاية فإنها غير موجودة (هل يمكن أن نستنتج شيئاً إذا حدث أن قيمتي النهاية من طريقين مختلفين متساويتان؟). ليكن المسار الأول هو عن طريق المحور التخيلي أي بفرض $x = 0$ نجد أن:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x+yi \to 0} \frac{(x^2 - y^2) + 2xy\,i}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{yi \to 0} \frac{-y^2}{y^2}$$

$$= \lim_{yi \to 0} -1 = -1$$

وإذا سلك المتغير z مقترباً من 0 بالمسار $y = x$ ينتج أن:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + i)^2 x^2}{2x^2} = i$$

وبما أن قيمتي نهاية الدالة مختلفتان فإن $\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|^2}$ غير موجودة.

التعريف التالي يوضح مفهوم نهاية الدالة إذا اقترب المتغير z من ∞، ومفهوم نهاية الدالة عندما تكون لا نهائية.

تعريف ٢:

إذا كانت f(z) دالة فإن $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $k > 0$ بحيث إن:

$$|z| > k \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon \quad \ldots\ldots (٢ - ٤)$$

وكذلك $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

لكل عدد حقيقي $k > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > k \quad \ldots\ldots (٢ - ٥)$$

علماً بأن f معرفة على جوار للنقطة z_0 ما عدا احتمالاً z_0 نفسها.

نفس المفارقات يمكن ذكرها في هذه الحالة كذلك. مع ملاحظة أن الجملة $|z| > k$ تعني جوار ∞ أو جميع النقاط الخارجية للقرص المغلق $|z| \leqslant k$.

كما يمكن ملاحظة أن $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ تكافىء $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$ وكذلك $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ تكافىء $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. لتوضيح هذه الأفكار نقدم الأمثلة التالية (انظر تمرين ٢٣، ٢٤).

مثـال ١٠:

بيِّن بالتعريف أن $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = 0$ حيث إن n عدد موجب.

الحـل:

إذا فرضنا أن $|z| > k$ فإن $|z|^n > k^n$ وبفرض أن $k > 1$ ينتج أن:

$$\frac{1}{|z^n|} < \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k}$$

فإذا فرضنا أن $\epsilon \leqslant \frac{1}{k}$ فإن:

$$k \geqslant \max \cdot \left\{1, \frac{1}{\epsilon}\right\}$$

هي العلاقة بين ϵ و k التي تحقق شرط التعريف المطلوب (كبرى = .max).

مثـال ١١:

بيِّن بالتعريف كذلك أن:

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z^n} = \infty$$

حيث إن n عدد صحيح موجب.

الحـل:

إذا فـرضنـا أن $\delta > |z|$ وكـانـت $1 > \delta$ فـإن $\delta > \delta^n \geqslant |z|^n$ ومن ذلـك نستنتج أن $\left|\frac{1}{z^n}\right| \geqslant \frac{1}{\delta}$.

فإذا فرضنا أن $k = \frac{1}{\delta}$ فإن العلاقة:

$$k = \max \cdot \{1, 1/\delta\}$$

بين δ و k هي العلاقة التي تحقق التعريف.

النظرية التالية أساس لباقي النظريات التي تلخص خصائص النهايات.

نظرية ١:

لتكن $w = f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$ دالة مركبة معرفة على جوار للنقطة $z_0 = x_0 + y_0\,i$ ما عدا احتمالاً z_0 نفسها فإذا كان $w_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$ عدداً مركبـاً فإن:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = \alpha_0 \\ \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = \beta_0 \end{array} \right. \quad \ldots . \quad (٢ - ٦)$$

البرهـان:

نفرض أن:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

فإن تعريف ١ يؤكد أنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$| z - z_0 | < \delta \Rightarrow | f(z) - w_0 | < \epsilon$$

ومن تعريف القيمة المطلقة للعدد المركب فإن هذه الجملة تكتب بالصيغة:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow | f(z) - w_0 | < \epsilon$$

وبما أن:

$$| u(x, y) - \alpha_0 | = | \operatorname{Re} \cdot (f(z) - w_0) | \leq | f(z) - w_0 |$$

وكذلك:

$$| v(x, y) - \beta_0 | = | \operatorname{Im} \cdot (f(z) - w_0) | \leq | f(z) - w_0 |$$

فإننا نستنتج ما يلي:

لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow | u(x, y) - \alpha_0 | < \epsilon,$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow | v(x, y) - \beta_0 | < \epsilon.$$

وهذا يكافيء:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha_0, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta_0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (٢ - ٧)$$

وبالعكس إذا فرضنا أن (٢ ـ ٧) صحيح فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |u(x,y)-\alpha_0| < \epsilon/2,$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |v(x,y)-\beta_0| < \epsilon/2.$$

وبالتالي إذا فرضنا أن:

$$|z-z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

فإن:

$$|f(z)-w_0| = \left|\left(u(x,y)-\alpha_0\right)+i\left(v(x,y)-\beta_0\right)\right|$$
$$\leqslant |u(x,y)-\alpha_0| + |v(x,y)-\beta_0| < \epsilon$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

إن أهمية هذه النظرية تكمن في تحويل إيجاد نهاية دالة مركبة إلى إيجاد نهاية دالتين حقيقيتين ذات متغيرين.

ويمكن بالاستعانة بالنظرية إثبات النظريات التالية بسهولة، كما يمكن إعطاء برهان (مستقل عن هذه النظرية) مباشرة من التعريف وهو لا يختلف عن مثيلاتها في موضوع التفاضل والتكامل، لذلك نتركه تمريناً للقارىء.

نظرية ٢:

لنفرض أن f و g دالتان مركبتان معرفتان على جوار للنقطة z_0 (ما عدا احتمالاً z_0 نفسها) وأن w_1, w_2 عددان مركبان بحيث إن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1, \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$$

فإن الجمل التالية صحيحة:

أ -
$$\lim_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = w_1 \pm w_2$$

ب -
$$\lim_{z\to z_0} \big(f(z)\, g(z)\big) = w_1 \cdot w_2$$

جـ - وبفرض أن $w_2 \neq 0$ فإن:

$$\lim_{z\to z_0} \big(f(z) / g(z)\big) = w_1 / w_2$$

لا شك أن فكرة اتصال الدالة مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بفكرة النهاية بل هي تفسير لحالة خاصة من حالات وجود نهاية الدالة. لذلك نقدم التعريف التالي:

تعريف ٣: (الاتصال):

نفرض أن f دالة مركبة ومجال تعريفها هو المجموعة D، يقال إن الدالة f متصلة على النقطة z_0 إذا تحققت الشروط التالية:

أ - $z_0 \in D$ (أي أن $f(z_0)$ عدد مركب).

ب - $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة.

جـ - $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

ويمكن استبدال هذه الشروط بشرط واحد وهو:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \in \mathbb{C} \quad \ldots\ldots (٢ - ٨)$$

النظرية التالية تعتبر نتيجة للنظرية ٢، نترك إثباتها تمريناً للقارىء.

نظرية ٣:

لنفرض أن الدالتين f, g متصلتان على النقطة z_0 التي تنتمي إلى مجالهما المشترك فإن الدوال $f \pm g$ و $f \cdot g$ و f / g (بشرط $g(z_0) \neq 0$) جميعها متصلة على النقطة z_0.

هذه النظرية تبين لنا اتصال كثير من الدوال المركبة على مجال تعريفها مثل كثيرة الحدود:

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot z + \alpha_2 \cdot z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$$

والدالة النسبية التي تتكون من حاصل قسمة كثيرتي حدود p و q أي أن الدالة $p(z)/q(z)$ متصلة على كل نقطة z لا تجعل المقام $q(z)$ صفراً.

كذلك فإن تركيب دالتين متصلتين يكون متصلاً كما تشير إلى ذلك نظرية ٤.

نظرية ٤:

لنفرض أن الدالة f معرفة على جوار للنقطة z_0 وهي متصلة عليها. وأن الدالة g معرفة على جوار للنقطة $f(z_0)$ وهي متصلة عليها فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على z_0.

البرهان:

بما أن g متصلة على النقطة $f(z_0)$ فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta' > 0$ بحيث إن:

$$| w - f(z_0) | < \delta' \Rightarrow |g(w) - g(f(z_0))| < \epsilon$$

وبما أن f متصلة على z_0 فإنه لكل $\epsilon' > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$| z - z_0 | < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon'$$

وبفرض أن $w = f(z)$ وأن $\delta' = \epsilon'$ فإن الجملتين السابقتين تنتجان ما يلي:
لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$| z - z_0 | < \delta \Rightarrow (| f(z) - f(z_0) | < \delta') \Rightarrow | g(w) - g (f(z_0)) | < \epsilon$$

أي أن:

$$| z - z_0 | < \delta \Rightarrow | g(f(z)) - g(f(z)) | < \epsilon$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

لعله من المفيد كذلك أن ننوه إلى أن أي دالة مركبة $f = u + vi$ متصلة عند

نقطة z_0 إذا وإذا فقط كانت الـدالتان u و v متصلتـين عند z_0، هـذه الملاحـظة نتيجة مباشرة لتعريف الاتصال ونظرية ١ . كما أننا نـنـوّه أنه لإيجـاد قيمة النهـاية لأي دالة مركبة نستخدم التعويض المباشر إذا كـانت النقطة z_0 في مجـال تعريف الدالة أما إذا نتج من التعويض المباشر إحدى الصيغ غـير المحددة مثـل ($\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و 1^∞ و $\infty - \infty$ و $0 \cdot \infty$). فـإننا نـوظف الطرق التي عـرفها القـارىء في حـالة الـدوال الحقيقية مثـل (التحليـل للعـوامـل والتبسيط، الضرب بـالمـرافق والتبسيط، القسمـة على أكـبر قوة للمتغـير z في البسط والمقام (في حـالـة $\frac{\infty}{\infty}$ وغيرها من الطرق الجبرية).

الأمثلة التالية توضح الملاحظات السابقة.

مثـــال ١٢ :

لإيجاد:

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 1}{z + i}$$

نلاحظ أن i− تجعل كلاً من بسط ومقام الـدالة صفـراً وبالتـالي فإن التعـويض المباشر يعطي $\frac{0}{0}$ لذلك فإن التحليل للعوامل والتبسيط يساعدنـا في إيجاد تلك النهاية وهي :

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 1}{z + i} = \lim_{z \to -i} \frac{(z - i)(z + i)}{(z + i)}$$

$$= \lim_{z \to -i} (z - i) = -2i$$

مثـــال ١٣ :

الـدالة $f(z) = (z^2 + 1)/(z + i)$ متصلة عـلى جميع الأعـداد المركبـة عدا جذور المقام وهي $z_0 = -i$ وبالتالي فإن الدالة :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z+i} & , \quad z \neq -i \\ -2i & , \quad z = -i \end{cases}$$

تكون متصلة على جميع الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثـــال ١٤:

الدالة f المعرفة بالمساواة:

$$f(z) = \cos y + ie^{xy}$$

متصلة عـلى جميع الأعـداد المركبـة ذلـك لأن $u(x, y) = \cos y$ وهي متصلة وكذلك $v(x, y) = e^{xy}$ متصلة أيضاً لجميع قيم x و y الحقيقية.

تمارين ٢ ـ ٢

في التمارين ١ ـ ١٠ جد قيمة النهاية (إن وجدت):

١ ـ $\lim_{z \to (i+1)} \dfrac{z^2 + z - 3}{z + 1}$

٢ ـ $\lim_{z \to 1} \dfrac{z^3 + i}{z - 1}$

٣ ـ $\lim_{z \to 4i} \dfrac{z^2 + 16}{z - 4i}$

٤ ـ $\lim_{z \to i} \dfrac{z^4 - 1}{z^2 + 1}$

٥ ـ $\lim_{z \to 0} \dfrac{|z|^2}{z}$

٦ ـ $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$

٧ ـ $\lim_{z \to +i} \dfrac{1}{1 - \text{Re} \cdot z}$

٨ ـ $\lim_{z \to -1} (\text{Arg}\, z)$

٩ ـ $\lim_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 1}{z - 2}$

١٠ - $\lim_{z \to \infty} \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$

في التمارين ١١ ـ ١٦ جد جميع نقاط الاتصال للدالة المذكورة:

١١ - $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 + 8i}{z - 2i} , & z \neq 2i \\ -2i , & z = 2i \end{cases}$$

١٢ - $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - |z|^2} , & |z| \neq 1 \\ 0 , & |z| = 1 \end{cases}$$

١٣ - $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} , & z \neq 0 \\ 0 , & z = 0 \end{cases}$$

١٤ - $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

١٥ - $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x - yi}{|z| - 1} , & |z| \neq 1 \\ i , & |z| = 1 \end{cases}$$

١٦ - $f(z) = ye^x + x^2 e^{-y} \cdot i$

١٧ ـ استخدم التعريف لإثبات ما يلي:

أ ـ $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$

ب ـ $\lim_{z \to i} \frac{1}{z} = -i$

جـ ـ $\lim_{z \to 1+i} (2z - 3i) = (2 - i)$

د ـ $\lim_{z \to i} (z^2 + i) = (i - 1)$

هـ ـ $\lim_{z \to i} (x^2 + 2yi) = -2$

و ـ $\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} \cdot z = \operatorname{Re} \cdot z_0$

١٨ ـ استخدم فكرة المسارات المختلفة لإيجاد قيم مختلفة للنهايات التالية وبالتالي تستنتج أنها غير موجودة:

أ ـ $\lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$

اقتراح: أحد المسارين z حقيقي والآخر z تخيلي مثلاً.

ب ـ $\lim_{z \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

اقتراح: أحد المسارين z حقيقي والآخر $y = x$.

جـ ـ $\lim_{z \to -1} z^{1/2}$

اقتراح: استعن بالشكل القطبي وافرض أن أحد المسارين نصف دائرة الوحدة العلوي والآخر نصف دائرة الوحدة السفلي.

١٩ ـ برهن نظرية ٢.

٢٠ ـ برهن نظرية ٣.

٢١ ـ لتكن الدالة f متصلة على جميع قيم z، بيِّن أن كلاً من $f(\bar{z})$ و $\overline{f(z)}$

و $\mathrm{Im} \cdot f(z)$ و $\mathrm{Re} \cdot f(z)$ متصلة على جميع قيم z.

٢٢ - برهن أن النهاية للدالة المركبة إن وجدت فإنها واحـدة ووحيدة، أي أنـه إن وجدت النهاية فإنه يوجد قيمة واحدة ووحيدة w_0 بحيث إن:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

٢٣ - برهن أن $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

٢٤ - برهن أن $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ إذا وإذا فقط $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

٢ ـ ٣ الدالة التحليلية:

إن تعريف المشتقة الأولى لدالة مركبة عند نقطة z_0 في مجال تعريفها لا يختلف عن تعريف المشتقة الأولى للدالة الحقيقية كما يبيّن ذلك التعريف التالي:

تعريف ٤:

لتكن الدالة f معرفة على جوار للنقطة z_0 فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 إذا وإذا فقط وجد عدد مركب w_0 بحيث إن:

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \ldots\ldots (٢ - ٩)$$

ويسمى عادة هذا العدد المركب w_0 بأنه المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة z_0 ويرمز له بالرموز التقليدية:

$$w_0 = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) \quad \ldots\ldots (٢ - ١٠)$$

وإذا كتبنا $\Delta z = z - z_0$ فإن التعريف يأخذ الصورة:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \ldots\ldots (٢ - ١١)$$

وهذه صيغة تمكننا من النظر إلى المشتقة كدالة بالمتغير z وهي:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \ldots\ldots (٢ - ١٢)$$

مثال ١٥:

باستخدام تعريف المشتقة جد $f'(z)$ إذا كانت $f(z) = \sqrt{z}$ لكل z تحقق $|z| > 0, -\pi < \text{Arg}\, z < \pi$

الحــل:

بتطبيق الصيغة (٢ ـ ١٢) للمشتقة نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}\right)}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z\left(\left(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}\right)\right.}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}}\ .$$

ننـوّه هنا أن الشرط المـذكور في المثـال يحدّد المجـال الذي تكـون فيه المشتقـة مـوجودة وسنبحث فيـها بعد طـرق إيجـاد مثـل هـذه الشروط. أمـا الآن نكتفي بعملية إيجاد المشتقة باستخدام التعريف مفترضين مجال وجودها.

مثــال ١٦:

بيِّن باستخدام التعريف أن المشتقة للدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست مـوجودة عنـد أي نقطة في المستوي المركب.

الحــل:

بتطبيق الصيغة (٢ ـ ١٢) نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$$

ولإثبات أن هذه النهاية غير موجودة عند أي عدد مركب z نجعل اقتراب المتغير Δz من 0 على مسارين أحدهما المحور الحقيقي x وهذا يعني أن $\overline{\Delta z} = \Delta z$ والآخر المحور التخيلي y وهذا يعني أن $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ ومن هذا نستنتج أن:

$$f'(z) = \begin{cases} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = 1 , & \overline{\Delta z} = \Delta z \\ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = -1 , & \overline{\Delta z} = -\Delta z \end{cases}$$

وبما أن القيمتين مختلفتان فإن $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$ غير موجودة وبالتالي تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب z.

لاحظ أن الدالة $f(z) = \bar{z} = x - yi$ متصلة على جميع الأعداد المركبة لأن $u(x, y) = x$ و $v(x, y) = -y$ متصلتان ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب وهنا ننوّه أن قابلية الاشتقاق للدالة عند نقطة مثل z_0 تؤكد اتصال هذه الدالة عند نفس النقطة وهذا ما تثبته النظرية التالية:

نظرية ٥:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 فإنها متصلة عند z_0.

البرهان:

لا يختلف (شكلا) عن إثبات نفس النظرية في الحالة الحقيقية لذلك نتركه تمريناً للقارىء.

والحقيقة أن إثبات جميع قوانين الاشتقاق في الحالة المركبة يشبه (شكلا) إثباتها في الحالة الحقيقية لذلك نتركها تمريناً للقارىء وهذه القوانين ملخصة بالنظرية التالية:

نظرية ٦:

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة z فإن القوانين التالية صحيحة:

أ ـ $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$

ب ـ $(f \cdot g)'(z) = f(z)\, g'(z) + f'(z)\, g(z)$

جـ ـ وإذا كان $g(z) \neq 0$ فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)\, f'(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}$$

د ـ إذا كانت g قابلة للاشتقاق عند f(z) فإن:

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z)$$

وهذه القوانين تمكننا من إيجاد المشتقة حيثما وجدت.

مثـال ١٧:

إذا كـانت $f(z) = c$ حيث c مقدار ثابت فإن $f'(z) = 0$، وإذا كـانت $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$ وإذا كانت $f(z) = (3z^2 - iz + 3i)^5$ فإن:

$$f'(z) = 5\,(3z^2 - iz + 3i)^4\,(6z - i)$$

وإذا كانت f كثيرة حدود فهي قابلة للاشتقاق لجميع قيم z

وإذا كانت:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

حيث إن $p(z)$ و $q(z)$ كثيرتا حدود فإن f قابلة للاشتقاق لجميع قيم z التي لا تجعل المقام $q(z)$ صفراً.

هذه القوانين تفيدنا إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على جوار للنقطة z لكن هناك دوال قابلة للاشتقاق على نقطة واحدة في مجالها أي قابلة للاشتقاق على نقطة معزولة، أنظر المثال التالي:

مثال ١٨:

بيِّن أن الدالة $f(z) = z\,\overline{z}$ قابلة للاشتقاق على النقطة المعزولة $z_0 = 0$ أي أنها غير قابلة للاشتقاق عند $z \neq 0$.

الحل:

باستخدام الصيغة (٢ ـ ١٢) وبفرض أن $z \neq 0$ نجد أن:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\,\overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\,\overline{\Delta z} + \overline{z}\,\Delta z + \Delta z\,\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\overline{z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z} \right)$$

وبالاستعانة بمثال ١٦ وكون $\overline{\Delta z}$ متصلة فإن:

$$f'(z) = \overline{z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \begin{cases} \overline{z} + z & , \ \overline{\Delta z} = \Delta z \\ \overline{z} - z & , \ \overline{\Delta z} = -\Delta z \end{cases}$$

ومن ذلك فإن المشتقة f غير موجودة لأن $z - \bar{z} \neq z + \bar{z}$ لكل $z \neq 0$ وبالتالي فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق لجميع قيم $z \neq 0$.

أما إذا كانت $z = 0$ فإن:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \ \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z}$$

$$= 0$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على النقطة $z = 0$ فقط ولذلك فهي معزولة.

إن الدوال القابلة للاشتقاق على مجال (مفتوح) تشكل نوعاً هاماً من الدوال المركبة لأنها تلعب دوراً كبيراً في التحليل المركب ولها تطبيقات هامة كذلك وهي تسمى دوال تحليلية.

تعريف ٥:

نقول إن الدالة f تحليلية Analytic عند النقطة z_0 إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق ليس فقط عند z_0 بل عند كل نقطة في جوار ما للنقطة z_0.

ونقول كذلك إن الدالة f تحليلية على مجموعة مفتوحة D إذا كانت تحليلية على كل نقطة من نقاط D. أما إذا كانت المجموعة D مغلقة فإن الدالة تكون تحليلية على D إذا كانت تحليلية على مجموعة مفتوحة تحتوي على D.

وإذا كانت الدالة تحليلية على كل المستوي المركب فإنها تسمى دالة كلية (Entire).

إذا كانت الدالة ليست تحليلية عند النقطة z_0 ولكنها تحليلية عند نقطة واحدة على الأقل في كل جوار للنقطة z_0 فإن النقطة z_0 تسمى نقطة متفردة (أو شاذة) (Singular point) للدالة.

الأمثلة التالية توضح المفاهيم التي ذكرت في التعريف السابق.

مثـــال ١٩:

الـدالة $f(z) = z^3$ دالـة تحليلية عـلى كل الأعـداد المركبـة (لأن $f'(z) = 3z^2$ معـرفة ومـوجودة لكـل عـدد مـركب) وبـالتـالي فهي دالـة كليـة ولكن الـدالـة $f(z) = z\,\bar{z}$ ليست تحليلية لأنها قابلة للاشتقاق عند النقطة $z = 0$ فقط (وليست قابلة للاشتقاق على أي جوار للنقطة $z = 0$) وبالتالي فهي ليست كلية.

مثـــال ٢٠:

الـدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ قـابلة للاشتقـاق على كـل الأعداد المـركبة $z \neq 0$ (لأن $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$). وبـالتالي فـإنها تحليلية عنـد كل عـدد مركب $z \neq 0$ أمـا عند النقطة $z = 0$ فإن الدالة ليست معـرفة (فضـلاً عن كونها غـير قابلة لـلاشتقاق) ولأن الدالة تحليلية على نقطة واحدة على الأقل في كـل جوار للنقـطة $z = 0$ (ما عـدا $z = 0$ نفسها) فـإن النقطة $z = 0$ نقـطة متفردة (شـاذة) للدالـة f. لاحظ كذلك أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليس لها نقاط متفردة (شاذة) مع كونها ليست تحليليـة عـلى أي عدد مـركب. لاحظ كذلـك أن الـدالـة $f(z) = z \cdot \bar{z}$ ليس لهـا نقـاط متفردة (شاذة) (مع كونها قابلة للاشتقاق على النقطة $z = 0$) لأنها ليست تحليلية عند أي النقطة في المستوي.

نلاحظ أن الدوال التحليلية تعتمد في تركيبها على المتغير z فقط ولكن الدوال غير التحليلية لا تعتمد على z فحسب بل على $\bar{z}$ كذلك، لذلك نستطيع التعرف عـلى كون الـدالة تحليليـة أم لا بالتعبـير عن متغيراتهـا x و y بدلالـة $z, \bar{z}$ فـإذا استطعنا حذف $\bar{z}$ تكون تحليلية وإذا لم نستطع حذف $\bar{z}$ فإن الدالة ليست تحليلية كما في المثال التالي:

مثـــال ٢١:

تعرَّف على الدالة التحليلية وغير التحليلية بين الدالتين:

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi \ , \ g(z) = (x^2 + 2x + y^2) + 2yi$$

الحــل:

تذكر قيمتي x و y بدلالة z و $\bar{z}$ وهما:

$$x = \text{Re} \cdot z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad , \quad y = \text{Im} \cdot z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

لنحصل على:

$$f(z) = \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - \frac{-1}{4}(z - \bar{z})^2 + \frac{1}{2i}(z + \bar{z})(z - \bar{z})\, i$$

$$= \frac{1}{4}(2z^2 + 2\bar{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2)$$

$$= z^2$$

وبما أننا تخلصنا من $\bar{z}$ فإنها تكون تحليلية (لاحظ كذلك أن هـذه الدالـة قابلة للاشتقاق على كل الأعداد المركبة وبالتالي فهي كلية فضـلاً عن كونها تحليليـة).
ولكن الدالة:

$$g(z) = \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 + (z - \bar{z})$$

$$= \frac{1}{4}(4z\bar{z}) + 2z$$

$$= z(\bar{z} + 2)$$

وهذه الدالة تعتمد على $\bar{z}$ وحيث إن:

$$\bar{z} = \frac{g(z)}{z} - 2$$

فإذا فرضنا أن g(z) تحليلية فإن:

$$\left(\frac{g(z)}{z} - 2\right)$$

تحليلية على كل الأعداد المـركبة مـا عدا $z = 0$ وبـالتالي فـإن $\bar{z}$ تحليلية عـلى كل الأعداد المركبة ما عدا $z = 0$ ولكن هذا ليس صحيحاً. أنظر مثال ١٦. لذلك لا تكون الدالة تحليلية.

على أن هذه الطريقة في الكشف عن الدالة التحليلية وغير التخليلية تواجه عدة عقبات منها قد لا يكون من السهل التعبير عن الدالة بدلالة z و $\bar{z}$ خاصة إذا احتوت الدالة في تركيبها على الدوال المثلثية والأسية وغير ذلك. وعقبة أخرى قد لا يكون من السهل تبسيط الدالة لنعرف اعتماد الدالة على $\bar{z}$. وهناك نوع من الدوال تكون تحليلية على منطقة ما ولا تكون تحليلية على مكملتها وليس من السهل التعرف على حدود هذه المنطقة، للتغلب على العقبات جميعها ولذلك نحتاج إلى ما يسمى معادلتا كوشي - ريمان وهذا ما خصص له البند التالي.

النظرية التالية تلخص خصائص الدوال التحليلية ونذكرها بدون برهان.

نظرية ٧:

لتكن الدالتان f و g تحليليتين على المجال D فإن الدوال $f \pm g$ و $f \cdot g$ تحليلية على المجال D وإذا فرض أن الدالة g ليست 0 على أي نقطة في المجال D فإن f/g كذلك تحليلية.

تمارين ٢ ـ ٣

١ ـ باستخدام قوانين الاشتقاق جد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ ـ $f(z) = 3z^2 - iz + (1 - 2i)$

ب ـ $f(z) = (2i + z^2)^4$

جـ ـ $f(z) = \frac{i - z}{i + z}$

د ـ $f(z) = \frac{(z + 2)^2}{(iz^2 + z - 3i)^3}$

هـ ـ $f(z) = 3i\,(z^3 - i)^2\,(z + 1)^5$

و ـ $f(z) = \sqrt{z^3}$

٢ ـ باستخدام تعريف المشتقة ناقش قابلية الاشتقاق ثم كونها تحليلية أم لا لكل من الدوال التالية:

أ ـ $f(z) = \bar{z}^2$

ب ـ $f(z) = |z|^2$

جـ ـ $f(z) = \text{Re} \cdot z$

د ـ $f(z) = \text{Im} \cdot z$

هـ ـ $f(z) = \frac{1}{z}$

و ـ $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

٣ ـ إبحث في كون الدالة تحليلية أو لا بالتعبير عن متغيرات الدالة بدلالة z و $\bar{z}$ وإمكانية التخلص من $\bar{z}$ في كل مما يلي:

أ - $f(z) = 2x + i\,(2y + 1)$

ب - $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x + yi$

جـ - $f(z) = (x^3 - 3y^2x) + i\,(3x^2y - y^3)$

د - $f(z) = r^2 \cos 2\theta + i \cdot r^2 \sin 2\theta$

٤ - بيِّن أن كثيرة الحدود تحليلية.

٥ - لتكن الدالتان f و g كليتين فبيِّن أن الدوال $f \pm g$، $f \cdot g$ دوال كلية. ماذا يمكن أن تقول حول كلية الدالة f/g؟.

٦ - برهن نظرية ٦.

٧ - برهن نظرية ٧.

٨ - **قانون لوبيتال:** بفرض أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق عند النقطة z_0 بحيث $f(z_0) = g(z_0) = 0$ ولكن $g'(z_0) \neq 0$ برهن أن:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

اقتراح: يمكن أن تكتب : $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ على الصيغة

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{\left(f(z) - f(z_0)\right) / (z - z_0)}{\left(g(z) - g(z_0)\right) / (z - z_0)}$$

ثم جد نهاية الطرفين.

٩ - استعن بقانون لوبيتال في التمرين السابق لإيجاد قيم النهايات التالية:

أ - $\displaystyle \lim_{z \to i} \frac{z^3 + i}{z - i}$

ب - $\displaystyle \lim_{z \to 2i} \frac{z^4 - 16}{z - 2i}$

جـ -
$$\lim_{z\to 1-i} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + (3i - 1)z - 2(1 + i)}$$

١٠ ـ أعط مثالا تبيّن فيه أن نظرية القيمة الوسطى للدوال الحقيقية ليست صواباً في الدوال المركبة. أي أعط مثالاً لدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق على مجال يحتوي على قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين z_1, z_2 في هذا المجال ولكن ليس صحيحاً لأن:

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$$

اقتراح: خذ مثلاً الدالة $f(z) = z^3$

والنقاط $z_1 = -1 - \sqrt{3}\, i \ , \ z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

٢ ـ ٤ معادلتا كوشي ـ ريمان (Cauchy - Riemann Equations):

إن حقيقة كون دالة ما $f = u + vi$ تحليلية تفرض علاقة ما بين المشتقات الجزئية للدوال الحقيقية ذات المتغيرين u و v والتي تتكوّن منها الدالة f. في هذا البند سنعرف كنه هذه العلاقة ونبحث الربط بين تحقق هذه العلاقة وكون الدالة تحليلية. التعريف التالي يبيّن العلاقة المذكورة والتي تسمى معادلتا كوشي ـ ريمان نسبة للعالم الفرنسي كوشي والعالم الألماني ريمان Cauchy-Riemann.

تعريف ٦:

نفرض أن $f = u + vi$ فإن المعادلتين:

$$u_x = v_y \;,\; u_y = -v_x \quad \ldots\ldots (٢ ـ ١٣)$$

تسميان معادلتا كوشي ريمان، حيث إن u_x, u_y, v_x, v_y ترمز للمشتقات الجزئية للدالتين u و v بالنسبة للمتغيرين x و y على الترتيب.

النظرية التالية تؤكد أن معادلتي كوشي ريمان شرط ضروري لكون الدالة f تحليلية.

نظرية ٨:

إذا كانت الدالة المركبة $f = u + vi$ تحليلية على المجال D فإن الدالتين u و v قابلتان للاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتغيرين x و y وتحققان معادلتي كوشي ـ ريمان (٢ ـ ١٣) كما أن قيمة المشتقة f' تحقق المساواة:

$$f' = u_x + v_x i$$

البرهان:

بما أن الدالة f تحليلية على المجال D فإن f' موجودة عند كل نقطة في المجال D وبفرض أن $z_0 \in D$ فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to \\ (x_0,y_0)}} \frac{u(x, y) + iv\,(x, y) - u(x_0, u_0) - iv\,(x_0, y_0)}{x + yi - (x_0 + y_0 i)},$$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to \\ (x_0,y_0)}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i\,\big(v(x, y) - v(x_0, y_0)\big)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}$$

وبما أن $f'(z_0)$ موجودة فإن كـل مسارات اقـتراب (x, y) من (x_0, y_0) تعطي نفس القيمة للنهايـة، لذلـك نفرض أن $\Delta z = z - z_0$ حقيقيـة وبالتـالي يكون $z - z_0 = x - x_0$ وعندها فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x\to x_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

ومن ذلك فإن:

(٢ - ١٤) .... $f'(z_0) = u_x\,(x_0, y_0) + i\,v_x\,(x_0, y_0)$

وإذا فرضنا أن $\Delta z = z - z_0$ تخيليـة فإن $z - z_0 = i(y - y_0)$ وبالتالي ينتج أن:

$$f'(z_0) = \lim \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{i\,(y - y_0)} + i \lim \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)}$$

$$= -i\,u_y\,(x_0, y_0) + v_y\,(x_0, y_0)$$

أي أن:

(٢ - ١٥) .... $f'(z_0) = v_y\,(x_0, y_0) - iu_y\,(x_0, y_0)$

وبالمقارنة بين (٢ - ١٤)، (٢ - ١٥) ينتج أن:

$$u_x\,(x_0, y_0) = v_y\,(x_0, y_0)\ ,\ \ u_y\,(x_0, y_0) = -v_x\,(x_0, y_0)$$

وهما معادلتا كوشي ـ ريمان، حيث تكتب للتبسيط على الصيغة:

$$u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x$$

وهذا يفيد كذلك أن المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة وتحقق معادلتي كوشي ـ ريمان في الوقت نفسه.

بما أن تحقق معادلتي كوشي ريمان شرط ضروري لكون الدالة f تحليلية، يعني أنه إذا لم تتحقق معادلتي كوشي ـ ريمان فإن الدالة ليست قابلة للاشتقاق أما إذا تحققت معادلتا كوشي ـ ريمان فإن ذلك لا يكفي لكون الدالة قابلة للاشتقاق كما يوضح ذلك الأمثلة التالية:

مثـــال ٢٢:

بيِّن باستخدام معادلتي كوشي ـ ريمان أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست تحليلية.

الحـــل:

بما أن $f(z) = x - yi$ فإن $u(x,y) = x$ و $v(x, y) = -y$

ومن ذلك فإن:

$$u_x = 1 \ , \ u_y = 0 \ , \ v_x = 0 \ , \ v_y = -1$$

وبما أن $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ لجميع قيم $z = x + yi$

فـإن الدالـة f ليست قابلة لـلاشتقاق عنـد أي عدد مـركب وبـالتـالي ليست تحليلية.

مثـــال ٢٣:

بيِّن أن معادلتي كوشي ـ ريمان متحققة للدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

عند النقطة $z = 0$ ولكنها ليست قابلة للاشتقاق عند $z = 0$.

الحـل:

نحاول باستخدام التعريف إيجاد المشتقة f' عند $z = 0$ لنجد أن:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

وبجعـل المتغـير z يقـترب من 0 بمسـارين: الأول المحـور الحقيقي x والثـاني المحور التخيلي y فإن:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \begin{cases} 1 \ , & \bar{z} = z \\ -1 \ , & \bar{z} = -z \end{cases}$$

وهذا يؤكد أن الدالة غير قابلة لـلاشتقاق عنـد $z = 0$ وبالمقـابل نجـد v, u للدالة f حيث:

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{(x^3 - 3xy^2) + i(-3x^2y + y^3)}{x^2 + y^2}$$

ومن ذلك فإن:

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \ , \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

وبتطبيق تعريف المشتقة فإن:

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

وبالمثل يمكن إيجاد كلٍ من:

$$u_y(0, 0) = 0 \quad , \quad v_x(0, 0) = 0$$

وكـذلك $v_y(0, 0) = 1$. وبـالمقارنـة نجد أن هـذه المشتقـات الجـزئيـة تحقق معـادلتي كـوشي ـ ريمـان. لاحظ أن كـلاً من u_x, u_y, v_x, v_y ليس متصـلاً عنـد $z = 0$.

نستنتج من ذلك أن تحقق معـادلتي كوشي ـ ريمـان ليس كافيـاً لكون الـدالة قابلة للاشتقاق. النظرية التالية تناقش الشروط الكافية.

نظرية ٩:

نفرض أن المشتقات الجـزئية u_x, u_y, v_x, v_y للدالتـين u, v موجـودة ومتصلة عند z_0. فإذا حققت هذه المشتقات الجـزئية معـادلتي كوشي ـ ريمـان فإن الـدالة $f = u + vi$ قابلة للاشتقاق عند z_0 وقيمة المشتقة عندئذ هي:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0)$$

وإذا كـانت تحققت هذه الشروط عـلى جوارٍ مفتـوح يحتوي z_0 فـإن الدالـة f تحليلية عند z_0.

البرهان:

لإيجاد قيمة المشتقة نحسب قيمة الكسر:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \ldots\ldots \quad (٢ - ١٦)$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta z} +$$

$$+ i\, \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta z}$$

ولتبسيط العمليات الحسابية نجد قيمة البسط للكسر الأول في الطرف الأيمن:

$$\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} = \{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$$- u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\}$$

$$= \Delta x \left\{ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \right\} +$$

$$+ \Delta y \left\{ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} \right\}$$

وبما أن المشتقات الجزئية u_x, u_y موجودة عند z_0 فإن نظرية القيمة الوسطى تؤكد وجود عددين x^*, y^* في الفترتين $[x_0, x_0 + \Delta x], [y_0, y_0 + \Delta y]$ على الترتيب بحيث إن:

$$\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} = u_x(x^*, y_0 + \Delta y),$$

$$\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = u_y(x_0, y^*).$$

ومن ذلك نحصل على ما يلي:

$$\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} =$$
$$\Delta x\, u_x(x^*, y_0 + \Delta y) + \Delta y\, u_y(x_0, y^*)$$

وبالاستفادة من كون المشتقات الجزئية متصلة، يمكن كتابة:

$$u_x(x^*, y_0 + \Delta y) = u_x(x_0, y_0) + \epsilon_1$$

حيث إن $\epsilon_1 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ وكذلك:

$$u_y(x_0, y^*) = u_y(x_0, y_0) + \epsilon_2$$

حيث إن $\epsilon_2 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ومن ذلك ينتج :

$$\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\} \quad \ldots\ldots (٢ - ١٧)$$

$$= \Delta x \{u_x (x_0, y_0) + \epsilon_1\} + \Delta y \{u_y (x_0, y_0) + \epsilon_2\}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\} \quad \ldots\ldots (٢ - ١٨)$$

$$= \Delta x \{v_x (x_0, y_0) + \epsilon_3\} + \Delta y \{v_y (x_0, y_0) + \epsilon_4\}$$

حيث إن $\epsilon_3 \to 0, \epsilon_4 \to 0$ عنـدمـا $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ وبتعـويض (٢ - ١٧، ٢ - ١٨) في الكسر (٢ - ١٦) نحصل على ما يلي :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta z} \{u_x + \epsilon_1\} + \frac{\Delta y}{\Delta z} \{u_y + \epsilon_2\}$$

$$+ i \frac{\Delta x}{\Delta z} \{v_x + \epsilon_3\} + i \frac{\Delta y}{\Delta z} \{v_y + \epsilon_4\}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta z} \{u_x + iv_x\} + \frac{\Delta y}{\Delta z} \{u_y + iv_y\} + \frac{\alpha}{\Delta z}$$

حيث إن :

$$\alpha = \Delta x (\epsilon_1 + i\epsilon_3) + \Delta y (\epsilon_2 + i\epsilon_4)$$

وبما أن $\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leqslant 1$ فإن :

$$\left|\frac{\alpha}{\Delta z}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| |\epsilon_1 + i\epsilon_3| + \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| |\epsilon_2 + i\epsilon_4|$$

$$< |\epsilon_1 + i\epsilon_3| + |\epsilon_2 + i\epsilon_4|$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z} = 0$$

وبذلك ينتج أن:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_x + iv_x) + \frac{\Delta y}{\Delta z} (u_u + iv_y) \right\}$$

$$+ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z}$$

وبالاستفادة من كون المشتقات الجزئية تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان حيث:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

فإن:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_x + iv_x) + \frac{\Delta y}{\Delta z} (-v_x + iu_x) \right\}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_x + iv_x) + i \frac{\Delta y}{\Delta z} (u_x + iv_x) \}$$

$$= (u_x + iv_x) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta z}$$

$$= u_x + iv_x$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

هذه النظرية تبينٌ أنه حتى تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة لا بد (بالإضافة لتحقق معادلتي كوشي ـ ريمان) من كون المشتقات الجزئية متصلة فضلاً عن وجودها عند النقطة.

مثال ٢٤:

بالاستعانة بالنظرية السابقة ناقش أين تكون الدالة f تحليلية أو قابلة للاشتقاق حيث:

$$f(z) = \left(\frac{1}{3} x^3 + y\right) + i\left(\frac{1}{2} y^2 - x\right)$$

الحــل:

نبحث عن المشتقات الجزئية للدالتين:

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + y \quad , \quad v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - x$$

وهي:

$$u_x = x^2 \; , \; u_y = 1 \quad ; \quad v_x = -1 \; , \; v_y = y$$

وبالتالي فإن هذه المشتقات موجودة ومتصلة، وكذلك:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow x^2 = y \; , \; u_y = 1 = -(-1) = -v_x$$

أي أن معادلتي كوشي ـ ريمان تتحقق فقط عند كل z بحيث إن:

$$y = x^2$$

ومن ذلـك فإن المشتقـة تكون مـوجودة عنـد كل نقـطة على القـطع المكـافىء $y = x^2$ وهي:

$$f'(z) = u_x + iv_x = x^2 - i = y - i$$

ولكن هـل هذه الـدالة تحليليـة؟ حتى تكون تحليليـة عند z_0 يجب أن تكـون قابلة للاشتقاق على مجمـوعة مفتـوحة تحتـوي z_0 لذلـك فإن هـذه الدالـة ليست تحليلية على أية نقطة في المستوي.

مثــال ٢٥:

بيِّن أن الدالة:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

كلية (أي تحليلية على كل المستوي المركب).

الحــل:

نجد المشتقات الجزئية للدالتين:

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

وهي:

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad v_y\, e^x \cos y$$

$$u_y = -e^x \sin y \quad , \quad v_x = e^x \sin y$$

وهذه الدوال متصلة لجميع قيم z وبالمقارنة نجد أن:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -\, v_x$$

وبالتالي فإن المشتقة موجودة عند كل نقطة من نقاط المستوي المركب وهي:

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z)$$

وبالتالي فهي تحليلية على كل المستوي المركب أي أنها كلية.

وفي نهاية هذا البند نرى من المفيد أن ننوّه أنه إذا كانت الدالة $f = u + vi$ تحليلية فإنه ليس من الضروري أن تكون الدالة $g = v + ui$ تحليلية. ذلك يعني أنه إذا كانت المشتقات الجزئية للدالتين u, v تحققان معادلتي كوشي ـ ريمان فإنه ليس من الضروري أن v, u تحققان معادلتي كوشي ـ ريمان، كما يوضح ذلك المثال التالي:

مثـال ٢٦:

من المعلوم أن الدالة: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ تحليلية ولكن هل الدالة $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ (بعد تبديل دور كل من v, u في الدالة السابقة f) تحليلية؟ نطبق النظرية السابقة فنجد المشتقات الجزئية للدالتين:

$$u = 2xy \quad , \quad v\,(x, y) = x^2 - y^2$$

وهي:

$$u_x = 2y \quad , \quad v_y = -2y$$

$$u_y = 2x \quad , \quad v_x = 2x$$

وهذه الدوال متصلة ولكن:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 2y = -2y \Leftrightarrow y = 0$$

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow 2x = -2x \Leftrightarrow x = 0$$

أي أن معادلتي كوشي ـ ريمان لا تتحقق إلّا عند النقطة $z = 0$ وبالتالي فإن $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ ليست تحليلية.

تمارين ٢ ـ ٤

١ ـ باستخدام معادلتي كوشي ـ ريمان بينّ أن الدوال التالية ليست قابلة للاشتقاق:

أ ـ $f(z) = |z|^2$

ب ـ $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$

جـ ـ $f(z) = \operatorname{Re} \cdot z$

د ـ $f(z) = 3y - xi$

هـ ـ $f(z) = e^y \cos x + i e^y \sin x$

٢ ـ باستخدام معادلتي كوشي ـ ريمان بينّ أن الدوال التالية ليست تحليلية عند أية نقطة في $\mathbb{C}$.

أ ـ $f(z) = (x^3 + 3xy^2 - 5x) + i(y^3 - 3x^2 y - 5y)$

ب ـ $f(z) = (x^3 + y) + i(y^2 - x)$

جـ ـ $f(z) = (x^2 + y^2) + (2xy)i$

د ـ $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

٣ ـ باستخدام معادلتي كوشي ـ ريمان بينّ أن الدوال التالية تحليلية على كل المستوي المركب:

أ ـ $f(z) = e^{2x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 2y$

ب ـ $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

جـ ـ $f(z) = 2x(1 - y) + i(x^2 - y^2 + 2y)$

د ـ $f(z) = (z^2 + 3)e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

٤ ـ برهن أنه إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D وكانت $f'(z) = 0$ لكل z في D فإن $f(z) = \alpha$ لكل $z \in D$ حيث إن α (عدد مركب) ثابت.

٥ ـ بفرض أن الدالة $f = u + vi$ تحليلية على المجال D بيِّن أن:

أ ـ إذا كانت u دالة ثابتة على المجال D فإن f ثابتة على D.

ب ـ إذا كانت v دالة ثابتة على D فإن f ثابتة على D.

جـ ـ إذا كانت $|f|$ دالة ثابتة على المجال D فإن f كذلك دالة ثابتة على المجال D.

٦ ـ بفرض أن $f(z) = u + vi$ دالة تحليلية على المجال D بيِّن أن:

أ ـ إذا كانت $v + ui$ تحليلية فإن f دالة ثابتة على D.

ب ـ إذا كانت f دالة حقيقية القيمة فإن f دالة ثابتة على D.

جـ ـ إذا كانت $\overline{f(z)}$ تحليلية فإن f دالة ثابتة على D.

د ـ إذا كانت $|f(z)|$ تحليلية فإن f دالة ثابتة على D.

٧ ـ إفرض أن f دالة معرّفة بالمساواة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^{4/3} \cdot y^{4/3}}{x^2 + y^2} \left(\sqrt[3]{y} + i\sqrt[3]{x}\right) & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

بيِّن أن معادلتي كوشي ـ ريمان تتحقق عند $z = 0$ ولكن الدالة ليست قابلة للاشتقاق عند $z = 0$.

٨ ـ بيِّن أن الدالة $f(z) = |z(z-1)|$ ليست تحليلية على أية نقطة في المستوي المركب.

اقتراح: حاول إثبات ذلك بالتناقض بالاستعانة بفرع د من تمرين ٦.

٩ ـ بفرض أن الدالتين u, v بدلالة الإحداثيات القطبية r, θ بين أن معادلتي كوشي ـ ريمان تأخذ الشكل التالي:

$$r \cdot u_r = v_\theta \quad , \quad r \cdot v_r = -u_\theta$$

وأن المشتقة الأولى هي :

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + v_r i) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta}(v_\theta - iu_\theta)$$

١٠ - باستخدام معادلتي كوشي - ريمان بالشكل القطبي (المذكور في التمرين السابق) جد المجال الذي تكون عليه الدالة $f(z) = z^{1/2}$ تحليلية.

١١ - باستخدام الشكل القطبي لمعادلتي كوشي - ريمان بيِّن أن الدالة :

$$f(z) = \ln r + \theta i$$

تحليلية في المجال $-\pi < \theta < \pi \;,\; r > 0$ وإن المشتقة هي :

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

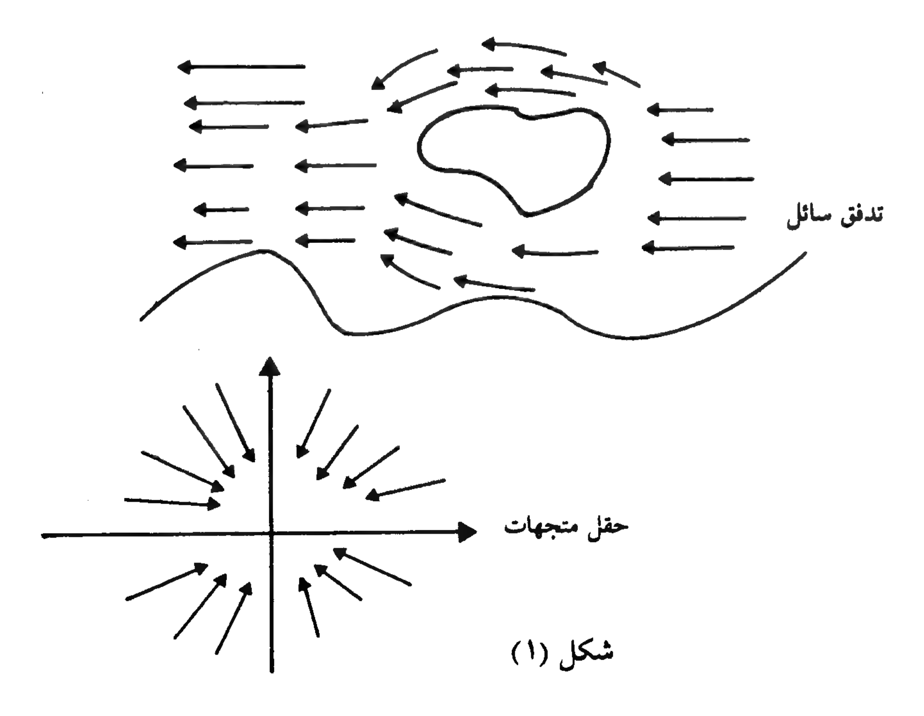
٢ ـ ٥ الدوال التوافقية وتطبيقاتها:

من المعادلات الهامة في العلوم الفيزيائية والهندسية المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

والتي تسمى معادلة لابلاس نسبة للعالم الفيزيائي Laplace. إن الدالة الحقيقية القيمة ذات المتغيرين $u(x, y)$ التي تمثل حلاً لهذه المعادلة ذات أهمية كبيرة ومعانٍ هامة. مثل الجهد الكهربائي والجهد المغناطيسي، كما تمثل الإزاحة في تذبذب غشاء مطاطي (ذا بعدين) بالإضافة إلى تدفق سائل على مستوي ثنائي الأبعاد.

إن مثل هذه الدالة $u(x, y)$ تمثل الجزء الحقيقي لدالة مركبة $f = u + vi$



شكل (١)

تكون تحليلية في مجال ما وهذه الدالـة التحليلية يمكن النـظر إليها فيـزيائيـاً بأنها تمثل تدفقاً Flow لسائل ما.

كما ينظر إليها بأنها تمثـل حقلاً Field من المتجهـات. لكل هـذه الملاحـظات فإن مثل هذه الدالة $u(x, y)$ لها أهمية خاصة لذلك نعرفها فيما يلي:

تعريف ٧:

تسمى الـدالة حقيقيـة القيمة $u(x, y)$ ذات المتغـيرين x, y دالـة تـوافقيـة في المجال D إذا كانت المشتقات الجزئية من الدرجـة الثانيـة لهذه الـدالة u بـالنسبة للمتغيرين x, y موجودة ومتصلة وتحقق:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \quad \ldots\ldots (٢ - ١٩)$$

حيث إن ∇^2 ترمز للمؤثر التفاضلي التالي:

$$\nabla^2 = \frac{\partial 2}{\partial x^2} + \frac{\partial 2}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots (٢ - ٢٠)$$

النظرية التالية تربط بين الدالة المركبة التحليلية وبين الدوال التوافقية.

نظرية ١٠:

إذا كـانت الدالـة $f = u + vi$ تحليلية عـلى المجال D فـإن كلاً من $u(x, y)$, $v(x, y)$ توافقية في المجال D.

البرهان:

بمـا أن $f = u + vi$ تحليلية في المجـال D فإن u, v تحققـان معادلتي كـوشي - ريمان بالإضافة إلى كون المشتقات الجزئية لهما موجودة ومتصلة وبالتالي ينتج أن:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

وبإيجاد الإشتقاق الثاني بالنسبة للمتغيرين x, y نجد أن:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad , \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

ولكن معروف من التفاضل والتكامل أن أي دالة قابلة للاشتقاق الثاني تحقق المساواة $v_{xy} = v_{yx}$ وبهذا فإن:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وهذا يثبت أن u توافقية (أي تحقق معادلة لابلاس). وبالمثل يمكن إثبات أن v توافقية كذلك.

إذا كانت الدالتان u, v توافقيتين (تحققان معادلة لابلاس) وكانت المشتقات الجزئية لكل من u, v بالنسبة للمتغيرين x, y موجودة ومتصلة على مجال D وتحقق معادلتي كوشي - ريمان فإن:

الدالة v تسمى المرافق التوافقي للدالة: u .... (٢ - ٢١)

وبتطبيق نظرية ٩ نستنتج أنه إذا كانت v المرافق التوافقي للدالة u على المجال D فإن:

الدالة $f = u + vi$ تحليلية على المجال: D .... (٢ - ٢٢)

وهكذا يمكن أن نقول إن الدالة $f = u + vi$ تحليلية على المجال D إذا وإذا فقط كانت الدالة v مرافقاً توافقياً للدالة u على المجال D.

مثـــال ٢٧ :

بيِّن أن الدالة: $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ توافقية على المستوي المركب.

الحـــل:

نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة u بالنسبة للمتغيرين x, y وهي:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 \quad , \quad u_{xx} = 6x$$

$$u_y = -6xy \quad , \quad u_{yy} = -6x$$

وبالتالي ينتج أن:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

لجميع قيم x, y الحقيقية، ومن ذلك فإن u توافقية على المستوي المركب.

المثال التالي يبيّن كيف نجد المرافق التوافقي لدالة توافقية.

مثـال ٢٨:

بيِّن أن الدالة $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ توافقية على كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ ثم جد المرافق التوافقي $v(x, y)$ لها.

الحـل:

نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x, y)$ بالنسبة للمتغيرين x, y وهي:

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad u_{xx} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

وبالجمع ينتج أن: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

وهذا يشير أن u دالة توافقية على كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ وبما أن v هي المرافق التوافقي للدالة u فإن (٢ ـ ٢٢) تؤكد أن $u + vi$ تحليلية على كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ وبالتالي فإن u, v تحققان معادلتي كوشي ـ ريمان ومن ذلك نستنتج أن: $u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

ومن المعادلة الأولى فإن: $v_y = u_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$,

وبإجراء التكامل بالنسبة للمتغير y نستنتج أن:

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2}\, dy$$

$$= 2\tan^{-1}(y/x) + g(x)$$

حيث إن g(x) تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير y. لكي نجد الدالة v يجب أن نجد g(x) لذلك نستفيد من المعادلة الثانية من معادلتي كوشي - ريمان، حيث أن:

$$v_x (x, y) = \frac{2}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{d}{dx} (y/x) + g'(x)$$

$$= \frac{-2\, y}{x^2 + y^2} + g'(x)$$

ولكن:

$$v_x = -u_y = \frac{-2\, y}{x^2 + y^2}$$

وبالمقارنة بين قيمتي v_x فإن $g'(x) = 0$ لذلك فإن $g(x) = c$ وهي الدالة الثابتة، وهذا يعني أن المرافق التوافقي للدالة u هو:

$v(x, y) = 2 \tan^{-1} (y/x) + c$

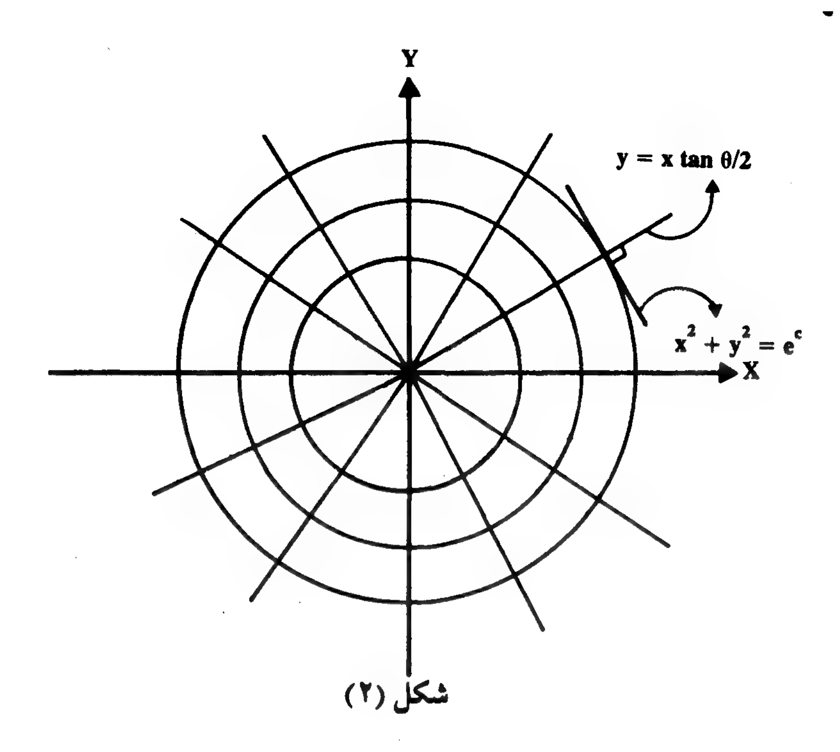
ومن ميزات الدالة التوافقية u ومرافقها التوافقي وجود علاقة التعامد بين منحنيات المستوي لهما. ولمعرفة منحنيات المستوي للدالة u في المثال السابق نفرض أن $c = $ مقداراً ثابتاً لنجد أن: $u(x,y) = c,$

$\ln (x^2 + y^2) = c$

ومن ذلك فإن $x^2 + y^2 = e^c$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{e^c}$ وكذلك بفرض أن $v(x, y) = \theta$، $\theta=$ مقداراً ثابتاً نجد أن:

$2 \tan^{-1} (y/x) = \theta$

ومن ذلك فإن $y = x \tan (\theta/2)$ تمثل معادلة خط مستقيم ميله $\theta/2$ (مع العلم أن نقطة الأصل ليست في المجال) فيكون شكل منحنيات المستوي تلك كما يلي:



شكل (٢)

إن علاقة التعامد بين منحنيات المستوي تعني أن المماس لمنحني المستوي $u(x, y) = \alpha$ يعامد المماس لمنحنى المستوي $v(x,y) = \beta$.

تمارين ٢ ـ ٥

١ ـ بيِّن أن الدوال التالية توافقية:

أ ـ $u(x, y) = \cosh x \sin y$

ب ـ $u(x, y) = y^3 + 3x^2y$

جـ ـ $u(x, y) = e^x \cos y$

د ـ $u(x, y) = \sin x \cosh y$

هـ ـ $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$

و ـ $u(x, y) = x(y - 1) + y$

ز ـ $u(x, y) = \tan^{-1}(y/x) \ , \ x \neq 0$

٢ ـ جد إن أمكن المرافق التوافقي $v(x, y)$ للدوال المذكورة في التمرين السابق.

٣ ـ هل يوجد دالة تحليلية f بحيث إن:

$$\text{Re} \cdot f = x^3 - 3xy^2 + 2y$$

جدها إن وجدت واذكر السبب إن لم توجد.

٤ ـ جد قيم α, β, γ التي تجعل الدالة:

$$u(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

توافقية.

٥ ـ هل يوجد دالة تحليلية f بحيث إن:

$$\text{Im} \cdot f = x^3 + y^3$$

جدها إن وجدت واذكر السبب إن لم توجد.

٦ ـ إذا كانت v مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية u فبيِّن بمثال أنه ليس ضرورياً أن تكون u مرافقاً توافقياً للدالة v (متى يكون ذلك صحيحاً).

٧ ـ إذا كانت v مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية u في المجال D فبيِّن أن الدالة $-u$ مرافق توافقي للدالة v.

٨ ـ إذا كانت v مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية u في المجال D فبيِّن أن uv دالة توافقية في المجال D.

٩ ـ إذا كانت v مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية u على المجال D فبيِّن أن الدالة $u^2 - v^2$ دالة توافقية على D.

١٠ ـ لأي دالة توافقية $u(x, y)$ برهن أن $v = u(x, -y)$ دالة توافقية كذلك.

١١ ـ بفرض أن الدالة $f = u + vi$ دالة تحليلية وليست صفراً في المجال D أثبت أن الدالة $\ln | f(z) |$ توافقية على المجال D.

١٢ ـ بالإستعانة بتمرين ٩ في البند السابق برهن أن معادلة لابلاس تأخذ الصيغة التالية بالإحداثيات القطبية:

$$r^2 u_{rr} + r \cdot u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

حيث إن $u(r, \theta)$ دالة بالمتغيرين r, θ توافقية على المجال D الذي لا يحتوي على نقطة الأصل $z = 0$. برهن أيضاً نفس المعادلة للمرافق التوافقي $v(r, \theta)$ للدالة u.

١٣ ـ بالاستعانة بالتمرين السابق برهن أن الدوال التالية توافقية ثم جد مرافقها التوافقي.

أ ـ $u(r, \theta) = r^n \cos n\theta$

ب ـ $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta$

١٤ ـ لأي دالة تحليلية $f = u + vi$ في المجال D بيِّن أن منحنيات المستوي

$u(x, y) = c$ للدالـة u ومنحنيـات المستـوي $v(x,y) = d$ للدالـة v
متعامدة.
اقتراح: جد ميل u وهو $\nabla u = \text{grad } u$ المعرّف بالمساواة:

$$\nabla u = (u_x, u_y)$$

ثم جـد ∇v وبيِّن أنهما متعـامدان وذلـك بإيجـاد الضرب الـداخـلي لهـما
$\nabla u \cdot \nabla v$.

١٥ ـ ارسم منحنيات المستوي للدوال u, v ولاحظ خاصية التعامد بينهما:

أ ـ $f(z) = z^2$ ب ـ $f(z) = \frac{1}{z}$

جـ ـ $f(z) = z^3$ (استخدم الشكل القطبي).

الفصل الثالث

الدوال الأساسية

ELEMENTARY FUNCTIONS



الفصل الثالث

الدوال الأسية

Elementary Functions

في هـذا الفصل نعـرض لمفـاهيم بعض الـدوال المـألـوفـة لـدى القـارىء في التفـاضل والتكـامل مثـل الدوال الأسيـة واللوغاريتميـة بـالإضـافـة إلى المثلثيـة والزائدية لنرى المفارقات في خصائص تلك الدوال عندما تعطى تعريفاً مركباً.

٣ ـ ١ الدالة الأسية (Exponential Function):

تعرف الدالة الأسية بالمساواة التالية:

(٣ ـ ١) .... $\exp z = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$

حيث إن e^x هي الدالة الأسية الحقيقية وكـذلك $\cos y, \sin y$ الـدوال المثلثة الحقيقيـة. وهذا التعـريف يتوافق مـع صيغة يـولر إذا كـانت $Re \cdot z = 0$ حيث ينتج عندئذ:

$$\exp z = e^z = \cos y + i \sin y = e^{yi}$$

ومن دراستنا لخصائص الدالتين:

(٣ ـ ٢) .... $u(x, y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x, y) = e^x \sin y$

نستطيع استنتاج خصائص الدالة e^z. سنـركز عـلى خصائص الـدالة e^z التي تختلف عن خصـائص الـدالـة الحقيقيـة e^x أمـا الخصـائص المشـتركـة لهـما (أي الصحيحة في الحالتين) سنذكرها دون إثبات.

ومن أهم الخصائص للدالة المركبة e^z أنها دورية في حين أن الدالة الحقيقية e^x ليست كذلك. هذه الخاصية تثبتها النظرية التالية:

نظرية ١:

الدالة المركبة e^z دورية بدورة مقدارها $2\pi i$ وبالرموز فإن $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z - w = 2n\pi i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (٣ - ٣)$$

وبشكل خاص فإن $e^z = 1$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z = 2n\pi i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (٣ - ٤)$$

البرهان:

بتطبيق تعريف (٣ - ١) نستنتج أن: $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$e^x e^{yi} = e^s e^{ti}$

حيث إن $z = x + yi$، $w = s + ti$ ومن ذلك ينتج أن $x = s$ وكذلك $\cos y = \cos t$، $\sin y = \sin t$ وبما أن الدوال $\sin y, \cos y$ دوال دورية بدورة قدرها 2π فإن حل المعادلتين $\cos y = \cos t$، $\sin y = \sin t$ هو $y - t = 2n\pi$ ولكل عدد صحيح n، وبالتالي فإن $e^z = e^w$ إذا وإذا فقط:

$$z - w = 2n\pi i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وإذا فرض أن $w = 0$ سنحصل على المطلوب الآخر. وهذا ينهي إثبات النظرية.

وبما أن هذه الدالة دورية فإنها تنقل بشكل واحد لواحد الشريط اللانهائي $0 \leqslant \mathrm{Im} \cdot z < 2\pi$ إلى المستوي المركب $\mathbb{C} - \{0\}$ ذلك أنه لا يوجد عدد مركب z بحيث إن $e^z = 0$.

النظرية التالية تبيّن العلاقة بين الدالة الأسية الحقيقية e^x والدالة الأسية المركبة e^z.

نظرية ٢:

الدالة الأسية الحقيقية e^x تمثل القيمة المطلقة للدالة الأسية المركبة e^z وبالرموز فإن:

$$|e^z| = e^x \quad \ldots\ldots (٣ - ٥)$$

وكذلك:

$$\arg e^z = \text{Im} \cdot z + 2n\pi \ , \ n = 0, \pm1, \ldots \quad \ldots\ldots (٣ - ٦)$$

البرهان:

بتطبيق التعريف (٣ - ١) فإن:

$$|e^z| = |e^x e^{yi}| = e^x$$

وكذلك:

$$\begin{aligned}\arg e^z &= \arg e^{yi} \\ &= y + 2n\pi \ , \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{aligned}$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

النظرية التالية تجمع خصائص الدالة الأسية المركبة المشابهة لخصائص الدالة الأسية الحقيقية.

نظرية ٣:

لأي عددين مركبين z, w فإن:

أ - $e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad \ldots\ldots (٣ - ٧)$

ب - $(e^z)^n = e^{nz} \quad \ldots\ldots (٣ - ٨)$

جـ - $e^z/e^w = e^{z-w} \quad \ldots\ldots (٣ - ٩)$

د - الدالة e^z تحليلية على كل عدد مركب z (أي أنها دالة كلية) حيث:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z \quad \ldots\ldots (٣ - ١٠)$$

البرهان:

نبرهن الفرع (د) ونترك إثبات بقية الفروع تمريناً للقارىء ولذلك نستعين بمعادلتي كوشي ـ ريمان وحيث إن:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

فإن:

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y$$

وبالتالي فإن المشتقات الجزئية:

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y$$
$$v_x = e^x \sin y \quad , \quad v_y = e^x \cos y$$

موجودة ومتصلة وحيث إن $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ فإن الدالة e^z قابلة للاشتقاق عند كل عدد مركب z وبالتالي فإنها تحليلية على المستوي المركب أي أنها دالة كلية وكذلك:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

مثال ١:

جد جميع قيم z بحيث إن:

$$e^z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

الحل:

إذا فرضنا أن $w = e^z$

فإن النظرية ٢ تؤكد أن:

$$|w| = e^x \quad , \quad \arg w = \operatorname{Im} \cdot z + 2n\pi$$

وبالتعويض عن قيمة w بالعدد المركب $1 + \sqrt{3}\, i$ فإن:

$$e^x = |w| = 2 \ , \ x = \ln 2$$

$$y = \text{Im} \cdot z = \text{Arg}\, w + 2n\pi$$

$$= \text{Arg}\,(1 + \sqrt{3}\ i) + 2n\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2n\pi \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبالتالي ينتج أن:

$$z = x + yi = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) i$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

مثــال ٢:

وبالمحافظة على عمومية الحل في المثال السابق فإن قيم z التي تحقق المعادلة:

$$e^z = w$$

هي:

$$z = \ln |w| + (\text{Arg}\, w + 2n\pi)\, i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (٣ - ١١)$$

مثــال ٣:

إبحث تأثير الدالة $w = e^z$ على الخط المستقيم:

أ - $x = \alpha \ , \ y = t$ حيث α عدد حقيقي وثابت و t متغير حقيقي يحقق $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

ب - $x = t \ , \ y = \beta$ حيث β عدد حقيقي ثابت و t متغير حقيقي موجب.

الحــل:

الخط المستقيم في الفرع (أ) معرف بما يلي:

$$z = x + yi = \alpha + ti \ , \ 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

وبالاستفادة من مثال ٢ فإن:

$$|w| = e^x = e^\alpha ,$$

$$\text{Arg}\, w = y = t \ , \ 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

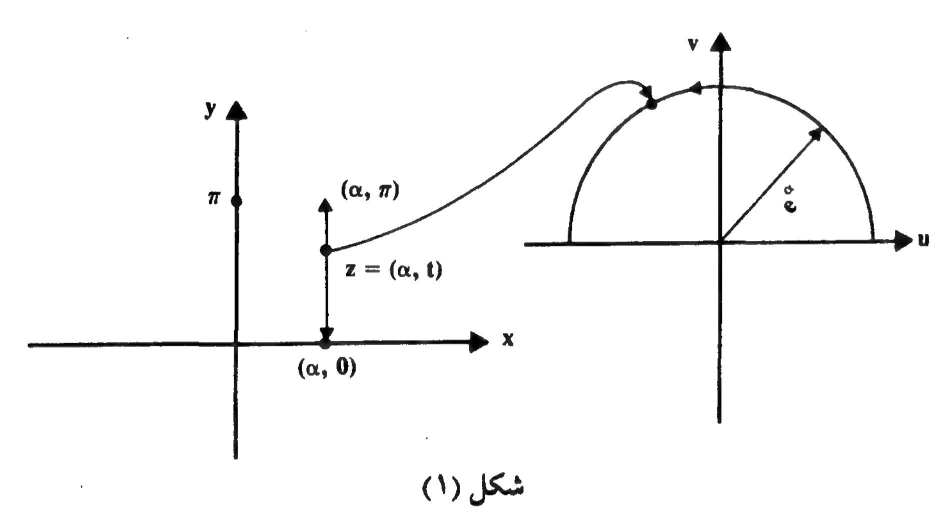
وبالتالي فإن:

$$e^z = w = e^\alpha e^{ti} \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

ويمكن تمثيل هذه المنطقة بيانياً في المستوي u, v كما يلي:

$$u = e^\alpha \cos t \quad , \quad v = e^\alpha \sin t$$

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها e^α, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ ومن ذلـك فإن صـورة الخط المستقيم الرأسي عبارة عن قوس في دائرة نصف قـطرها e^α يتحـدّد حسب قيم t أو $\text{Im} \cdot z$.



شكل (١)

لاحظ أنه إذا أخذت t القيم $-\pi < t \leqslant \pi$ فإن صورة الخط المستقيم هو كل الدائرة التي نصف قطرها e^α ولكون e^z دورية بـدورة قدرهـا $2\pi i$ فإن كـل نقطة على محيط الدائرة تمثل صورة عدد لا نهائي من النقاط على الخط الرأسي المسافـة بينها مضاعفات الدورة 2π أي أن صورة النقاط:

$$\{ z = \alpha + (t + 2n\pi) i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

هي النقطة:

$$u + vi = e^\alpha \cos t + ie^\alpha \sin t \quad , \quad -\pi < t \leqslant \pi.$$

أما المستقيم في الفرع (ب) فهو مستقيم أفقي ومعرف بما يلي:

$$z = x + yi = t + \beta i \quad , \quad t \geqslant 0$$

وبالاستفادة من مثال ٢ فإن:

$$|w| = e^t \quad , \quad t \geqslant 0$$

$$\text{Arg } w = y = \beta$$

وبما أن Arg w مقدار ثابت فإن:

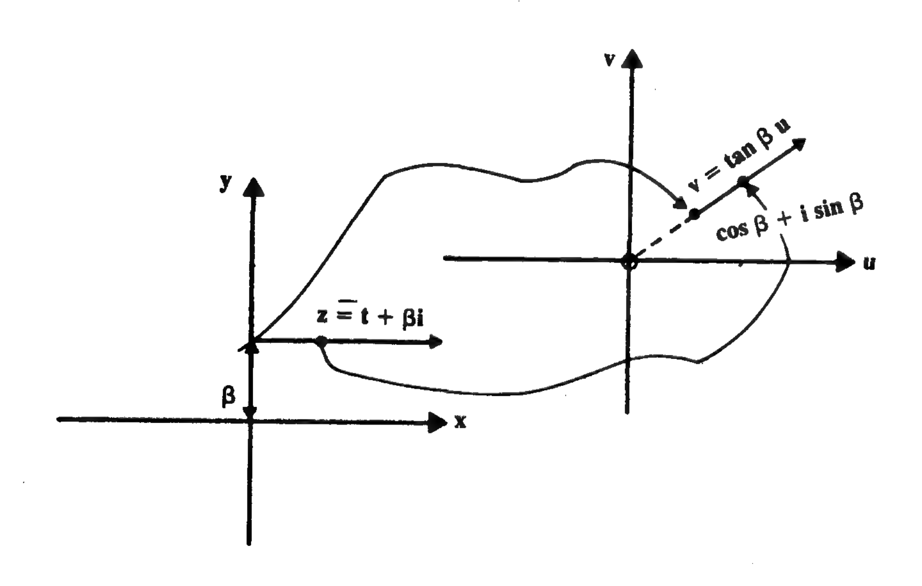
$$u = \cos\beta\, e^t \quad , \quad v = \sin\beta\, e^t$$

تمثل معادلة شعاع أي نصف المستقيم الذي تكون معادلته:

$$v = (\tan\beta)\, u \ ,$$

وزاويـة ميله β حيث تكـون صـورة النقـطة $z = 0 + \beta i$ هي النقـطة $\cos\beta + i \sin\beta$ وكلما زادت قيمـة t فإن صـورها تتحـرك على الشعـاع باتجـاه السهم في الشكل أدناه.

كما نترك للقـارىء استنتاج أن صـورة المستقيم المحدد بقيم t حسب المتبـاينة $t \leqslant 0$ هي الجـزء من الشعـاع الممتـد من النقـطة $\cos\beta + i \sin\beta$ إلى نقـطة الأصل (وبالطبع عدا نقطة الأصل نفسها).



شكل (٢)

تمارين ٣ ـ ١

١ ـ جد قيمة e^z لكل قيمة من قيم z التالية:

أ ـ $z = \sqrt{3} - i$ ب ـ $z = \frac{\pi}{2} i$

جـ ـ $z = 1 + \frac{\pi}{6} i$ د ـ $z = 3 - \frac{3\pi}{4} i$

٢ ـ جد قيمة z التي تحقق المعادلة $e^z = w$ لكل قيمة من قيم w التالية:

أ ـ $w = 2i$ ب ـ $w = \sqrt{3} + i$

جـ ـ $w = 1 - i$ د ـ $w = -4$

٣ ـ عبِّر عن الدوال التالية بالصيغة $u + vi$:

أ ـ $f(z) = e^{z^2}$ ب ـ $f(z) = e^{\bar{z}}$

جـ ـ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ د ـ $f(z) = e^{|z|^2}$

٤ ـ لأي عدد مركب z بيِّن أن:

أ ـ $|\exp(z^2)| \leqslant \exp(|z|^2)$

ب ـ $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$

٥ ـ برهن صحة ما يلي:

أ ـ $|e^{-2z}| < 1$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط $\text{Re } z > 0$.

ب ـ $e^{i\bar{z}} = \overline{(e^{zi})}$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$z = n\pi \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

٦ ـ برهن أن الدوال التالية ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوي المركب:

أ ـ $f(z) = e^{\bar{z}}$ ب ـ $f(z) = e^{|z|^2}$

٧ ـ جد المشتقة الأولى للدوال التالية ثم جد المجال الذي تكون عليه الدالة تحليلية:

أ ـ $f(z) = e^{1/z}$ ب ـ $f(z) = z^2 e^z$

٨ ـ بالاستعانة بقانون لوبيتال المذكور في التمرين ٨ من التمرين ٢ ـ ٣ بيِّن أن:

أ ـ $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - e^z}{z} = -1$ ب ـ $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2} i} \dfrac{e^z - i}{z - \frac{\pi}{2} i} = i$

٩ ـ برهن الخصائص أ، ب، جـ الواردة في نظرية ٣.

١٠ ـ جد الشرط (الشروط) التي تجعل الجمل التالية صواباً:

أ ـ قيمة e^z حقيقية خالصة.

ب ـ قيمة e^z تخيلية خالصة.

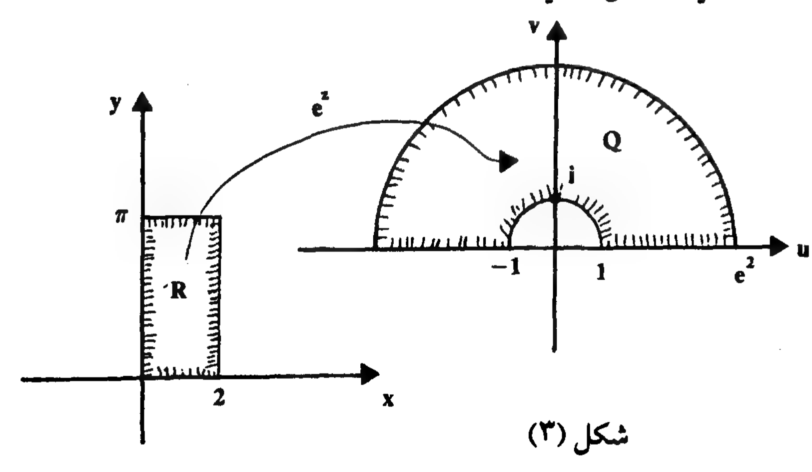
١١ ـ بالاستعانة بمثال ٣ بيِّن أن صورة المنطقة المستطيلة R حيث:

$$R = \{z \in \mathbb{C}: 0 \leqslant \text{Re}\, z \leqslant 2 \ , \ 0 \leqslant \text{Im} \cdot z \leqslant \pi\}$$

تحت تأثير الدالة $f(z) = e^z$ هي نصف الحلقة Q حيث إن:

$$Q = \{w \in \mathbb{C}: 1 \leqslant |w| \leqslant e^2 \ , \ 0 \leqslant \text{Arg}\, w \leqslant \pi\}$$

كما في الشكل التالي:



شكل (٣)

١٢ ـ لأي عدد حقيقي α جد صورة الشريحة اللانهائية.

$$\{z \in \mathbb{C}: \alpha \leqslant Im \cdot z \leqslant \alpha + 2\pi\}$$

تحت الدالة $f(z) = e^z$.

١٣ ـ جد صورة الخط المستقيم:

$$\{z \in \mathbb{C}: z = t + (t + 2\pi) i \ , \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

تحت الدالة $f(z) = e^z$.

١٤ ـ إذا كانت الدالة $v(x, y)$ تمثل المرافق التوافقي للدالة $u(x, y)$ فبيِّن أن الدالة:

$$F(z) = U (x, y) + iV (x, y)$$

تحليلية حيث إن:

$$U (x, y) = e^{u(x,y)} \cos v (x, y)$$

$$V (x, y) = e^{u(x,y)} \sin v (x, y)$$

١٥ ـ صف سلوك الدوال:

أ ـ $e^{(x + yi)}$ عندما تقترب x من $-\infty$

ب ـ $e^{(2\pi + yi)}$ عندما تقترب y من ∞

٣ ـ ٢ الدالة اللوغاريتمية:

تبيّن لنا في البند السابق أن الدالة المركبة الأسية e^z دالة دورية وبالتالي فهي تعين صورة واحدة ووحيدة لعدد لا نهائي من الأعداد المركبة في مجال تعريفها، وهذا يعني أن الدالة e^z ليست واحد ـ لواحد بل هي دالة متعدد ـ لواحد، ومن المعلوم لدى القارىء أن الدالة العكسية لأي دالة من نوع متعدد ـ لواحد غير معرفة، لذلك كان يجب تحديد مجال تعريف الدالة من نوع متعدد ـ لواحد كي تصبح واحد ـ لواحد لنتمكن من دراسة الدالة العكسية لها، ولكن يمكن أن يُنظر إلى الأمر من زاوية أخرى تماماً كما ينظر للدالة الضمنية $y = f(x)$ التي تضمنتها المعادلة $F(x, y) = 0$ في التفاضل والتكامل أي يمكن أن ننظر لعكس الدالة من نوع المتعدد ـ لواحد من الجهة الأخرى ونسميها دالة متعددة القيمة أي أنها تعين قيم متعددة كصور مختلفة لعدد مركب واحد في مجال تعريفها.

من المعلوم أن دالة اللوغاريتم الطبيعي الحقيقية $\ln x$ تمثل الدالة العكسية للدالة الأسية الحقيقية e^x لأنها واحد ـ لواحد. وحيث إن الدالة المركبة e^z ليست واحداً ـ لواحد بل هي متعدد ـ لواحد فإن الدالة (العكسية) لها ستكون دالة متعددة القيمة وهي الدالة اللوغاريتمية المركبة كما يشير التعريف التالي:

تعريف ١٠:

الدالة اللوغاريتمية المركبة التي يرمز لها بالرمز $\log z$ معرَّفة بالمساواة التالية:

$$\log z = \ln |z| + (\arg z)\, i \quad , \quad |z| > 0 \qquad \text{(٣ ـ ١٢)}$$

وبلغة الإحداثيات القطبية للعدد المركب z حيث $z = re^{\theta i}$ فإن:

$$\log z = \ln r + \theta i \quad , \quad r > 0 \qquad \text{(٣ ـ ١٣)}$$

حيث إن θ تمثل إحدى قيم $\arg z$ وبما أن $\arg z$ متعدد القيمة لأي عدد مركب z فإن:

$$(١٤ - ٣) \quad .... \quad \log z = \ln r + (\theta + 2n\pi)i \quad , \quad r > 0$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وهذا يبيّن لنا أن الدالة $\log z$ متعددة القيمة حيث تعين عدداً لا نهائي من الصور المختلفة للعدد المركب الواحد z.

إن الدالة متعددة القيمة $f(z)$ تتضمن دالة وحيدة القيمة $F(z)$ باختيار مجال مناسب D تكون فيه قيمة $F(z)$ إحدى قيم الدالة متعددة القيمة $f(z)$ وعندها تكون الدالة $F(z)$ واحد ـ لواحد. وإذا كانت الدالة $F(z)$ تحليلية في المجال D فإنها تسمى فرع للدالة $f(z)$.

إن الدالة $\operatorname{Log} z$ حيث:

$$(١٥ - ٣) \quad .... \quad \operatorname{Log} z = \ln |z| + (\operatorname{Arg} z)i \quad , \quad |z| > 0$$

تسمى القيمة الرئيسية للدالة $\log z$ واحد ـ لواحد وفي هذه الحالة فإنها تمثل الدالة العكسية للدالة الأسية e^z حيث يكون:

$$(١٧ - ٣) \quad .... \quad \operatorname{Log} e^z = z \quad ; \quad e^{\operatorname{Log} z} = z$$

وحتى نبيّن أن الدالة $\operatorname{Log} z$ فرع للدالة $\log z$ نحتاج أن نبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق وهي في النظرية التالية.

نظرية ٤:

أ ـ الدالة $\log z$ ليست متصلة عند كل نقطة z تحقق الشرطين $\operatorname{Re} \cdot z \leqslant 0$ و $\operatorname{Im} \cdot z = 0$ (أي على الأعداد الحقيقية غير الموجبة).

ب ـ الدالة $\log z$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة z لا تقع على الشعاع $r = 0,$ $\theta = \pi$ (أي أن $z = 0$ وكل z تحقق الشرطين $\operatorname{Im} \cdot z = 0,$ $\operatorname{Re} \cdot z < 0$ تمثل نقطة متفردة للدالة $\log z$).

البرهان:

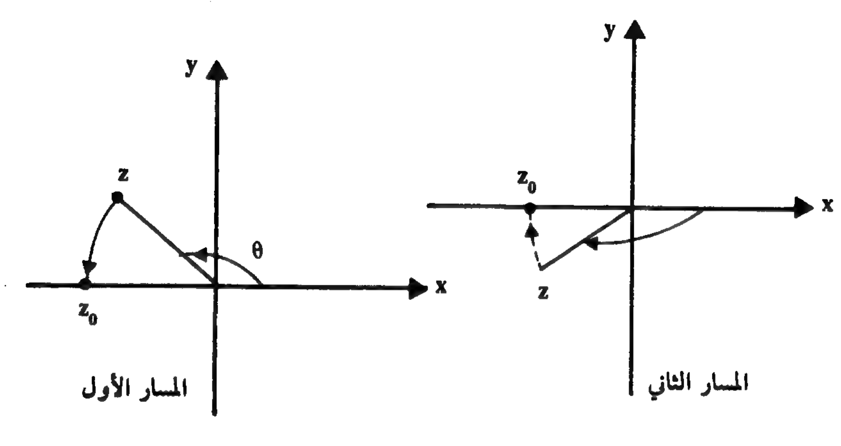
بالاستفادة من الشكل القطبي للدالة $\log z$ وهو:

$$\log z = \ln r + \theta i \quad , \quad r > 0$$

فإننا نجد نهاية الدالة $\log z$ عندما تقترب z من النقطة z_0 التي (تحقق الشرطين $\mathrm{Im} \cdot z_0 = 0 , \mathrm{Re} \cdot z_0 \leqslant 0$) تقع على الشعاع $\theta = \pi$ بسلوك مسارين الأول اقتراب z من z_0 من النصف الأعلى للمستوي والثاني اقتراب z من z_0 خلال النصف الأسفل للمستوي المركب، لنجد أن:

$$\lim_{z \to z_0} \log z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0,\pi)} (\ln r + \theta i)$$

$$= \ln r_0 + \pi i$$



شكل (٤)

في حالة المسار الأول وان:

$$\lim_{z \to z_0} \log z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0,\pi)} (\ln r + \theta i)$$

$$= \ln r_0 - \pi i$$

في حالة سلوك المسار الثاني وحيث إن للنهاية قيمتين مختلفتين فإن $\lim_{z \to z_0} \log z$ غير موجودة عند كل نقطة z_0 تحقق الشرطين:

$$\mathrm{Im} \cdot z_0 = 0 \quad , \quad \mathrm{Re} \cdot z_0 \leqslant 0$$

وهذا ينهي إثبات الفرع (أ) ولإثبات الفرع (ب) فإنه يكفي أن نبيّن أن المشتقات الجزئية للدالتين u و v اللتين تتكوّن منهما الدالة $\log z$ تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان عند كل نقطة لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$، ذلك أن الفرع (أ)

الدالة ليست قابلة للاشتقاق (وبالتالي ليست تحليلية) عند النقاط z التي تحقق $Re \cdot z \leq 0$ و $Im \cdot z = 0$ لكونها ليست متصلة عندها. وحيث إن:

$$\log z = \ln r + \theta i \quad , \quad r > 0$$

فإن:

$$v(r, \theta) = \theta \quad ; \quad u(r, \theta) = \ln r$$

وبالتالي ينتج:

$$u_r = \frac{1}{r} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = 1$$

وهذه المشتقات الجزئية موجودة ومتصلة عند كل z_0 بحيث إن:

$$\theta = \arg z \neq \pi \quad , \quad |z| > 0$$

وكذلك تحقق:

$$u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

وهما معادلتا كوشي ـ ريمان أي أن الدالة $\log z$ قابلة للاشتقاق عند كل z لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$ $|z| = 0,$ حيث تكون مشتقتها:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = e^{-\theta i}(u_r + i\, v_r)$$
$$= \frac{1}{r} e^{-\theta i} = \frac{1}{re^{\theta i}}$$

أي أن:

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$$

ومن ذلك فإن $\log z$ دالة تحليلية على كل z لا تحقق الشرطين $Re \cdot z \leq 0$ و $Im \cdot z = 0$.

نستنتج مما تقدم أن الدالة:

$$\text{Log}\, z = \ln r + \phi i \quad , \quad r > 0 \quad , \quad -\pi < \phi \leq \pi \qquad \text{....} \quad (١٨ - ٣)$$

تحليلية في المجال المذكور وبالتالي فإن Log z فرع للدالة log z. ويسمى هذا الفرع الفرع الرئيسي، إن مجموعة النقاط المتفردة للدالة Log z وهي كل الأعداد الحقيقية غير الموجبة والتي يمثلها نصف المحور x السالب فإنها تسمى فصل الفرع للدالة Log z وكذلك فإن النقطة المتفردة المشتركة لجميع فروع الدالة log z وهي $z = 0$ فإنها تسمى نقطة الفرع. وبشكل أعم فإنه يمكن تعريف فروع الدالة log z لأي عدد حقيقي α بحيث إن:

$$w = \text{Log}\, z = \ln r + \theta i \, , \; r > 0 \, , \; \alpha < \theta \leqslant 2\pi \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ١٩)$$

تمثل فرعاً للدالة log z في المجال المذكور وهنا فإن فصل الفرع هو الشعاع $\theta = \alpha$ حيث تكون الدالة Log z ليست تحليلية على هذا الشعاع وعند $z = 0$ كذلك. ويكون مجال هذه الدالة كل الأعداد المركبة z بحيث إن $| z | > 0$ وتنقل هذا المجال بشكل واحد - لواحد وشامل على الشريحة الأفقية اللانهائية.

$$\alpha < \text{Im} \cdot w \leqslant \alpha + 2\pi \quad \ldots\ldots \quad (٣ - ٢٠)$$

إن الدالة log z تشبه دالة اللوغاريتم الطبيعي الحقيقي من حيث خضوعها لقوانين اللوغاريتمات المعروفة كما تبيّن النظرية التالية.

نظرية ٥:

لأي عددين مركبين z, w حاصل ضربهما ليس صفراً فإن القوانين التالية صائبة:

أ - $\log zw = \log z + \log w$

ب - $\log z/w = \log z - \log w$

البرهان:

نبرهن (أ) ونترك إثبات الفرع (ب) تمريناً للقارىء. وبتعريف الدالة اللوغاريتمية نستنتج أن:

$$\log zw = \ln|zw| + i\arg(zw)$$
$$= \ln|z||w| + i(\arg z + \arg w)$$
$$= (\ln|z| + i\arg z) + (\ln|w| + i\arg w)$$
$$= \log z + \log w$$

لاحظ أننا استفدنا من حقيقة أن سعة حاصل ضرب عددين مركبين هي مجموع سعتي العددين المركبين في الخطوة الثانية، وكذلك استفدنا من الخاصية المشابهة للدالة اللوغاريتمية الحقيقية ln في الخطوة الثالثة. وهذا ينهي إثبات النظرية.

هذه الخصائص التي تحققها الدالة متعددة القيمة log z قد تفشل في تحقيقها الدالة وحيدة القيمة (التي تمثل الفرع الرئيسي) Log z وإليك المثال التالي:

مثال ٤:

إذا كان $z = -1 + i$, $w = 2i$ جد قيمة كل مما يلي:

أ - $\log z w$, $\log w$, $\log z$

ب - القيمة الرئيسية: $\text{Log } zw$, $\text{Log } w$, $\text{Log } z$

جـ - بيِّن أن الفرع (أ) من النظرية السابقة يتحقق في حالة الدالة متعددة القيمة log z ولكنه لا يتحقق في حالة الدالة وحيدة القيمة Log z.

الحل:

أ - بتطبيق تعريف الدالة log z نستنتج أن:

$$\log(-1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right), n = 0, \pm 2, \ldots.$$

$$\log(2i) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\log 2i(-1 + i) = \log(-2 - 2i)$$
$$= \ln\sqrt{8} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$$

ب ـ وبتطبيق تعريف الدالة Log نستنتج ما يلي:

$$\text{Log}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}\, i$$

$$\text{Log}(2i) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}\, i$$

$$\text{Log}\, 2i(-1+i) = \text{Log}(-2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{3\pi}{4}\, i$$

جـ ـ وبجمع قيم $\log(-1+i)$, $\log 2i$ نستنتج أن:

$$\log(-1+i) + \log 2i = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right),$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

وبما أن $\frac{5\pi}{4}$ تمثل إحدى قيم سعة العدد المركب $2i(-1+i)$ فإن:

$$\log(-1+i) + \log 2i = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \log 2i(-1+i)$$

أما إذا جمعنا قيمة $\text{Log}(-1+i)$ وقيمة $\text{Log}\, 2i$ فإن:

$$\text{Log}(-1+i) + \text{Log}\, 2i = \ln\sqrt{8} + \frac{5\pi}{4}\, i$$

ولكن:

$$\text{Log}\, 2i(-1+i) = \ln\sqrt{8} + \left(\frac{-3\pi}{4}\right) i$$

لذلك نلاحظ أن:

$$\text{Log}\, zw \neq \text{Log}\, z + \text{Log}\, w$$

مما تقدم نلاحظ أن عدم تحقق المساواة بين $\text{Log}\, zw$ و $\text{Log}\, z + \text{Log}\, w$ يرجع بالدرجة الرئيسية إلى أن السعة الرئيسية لحاصل ضرب عددين مركبين

ليس بالضرورة مساوياً لحاصل جمع السعتين الرئيسيتين لهما. أي أن

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \neq \operatorname{Arg} zw$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثـال ٥:

أ - جد المجال الذي تكون عليه الدالـة f تحليلية ثم جـد النقاط المتفـردة لها (إن وجدت) حيث إن:

$$f(z) = \frac{\log (z - 2i)}{z^2 + 1}$$

ب - جـد الفـرع للدالـة متعددة القيمة $g(z) = \log (z^2 - 1)$ الـذي يكـون تحليلياً عند $z = 0$.

الحـل:

أ - لإيجـاد المجال الـذي تكون عليـه f تحليلية نبحث عن النقـاط التي تجعل المقام صفراً ثم القيم التي يكـون البسط عندهـا غير قـابل لـلاشتقاق ثم نستثني هذه النقاط من مجمـوعة الأعـداد المركبـة $\mathbb{C}$. وبفرض أن المقـام $z^2 + 1$ يساوي صفراً فإن:

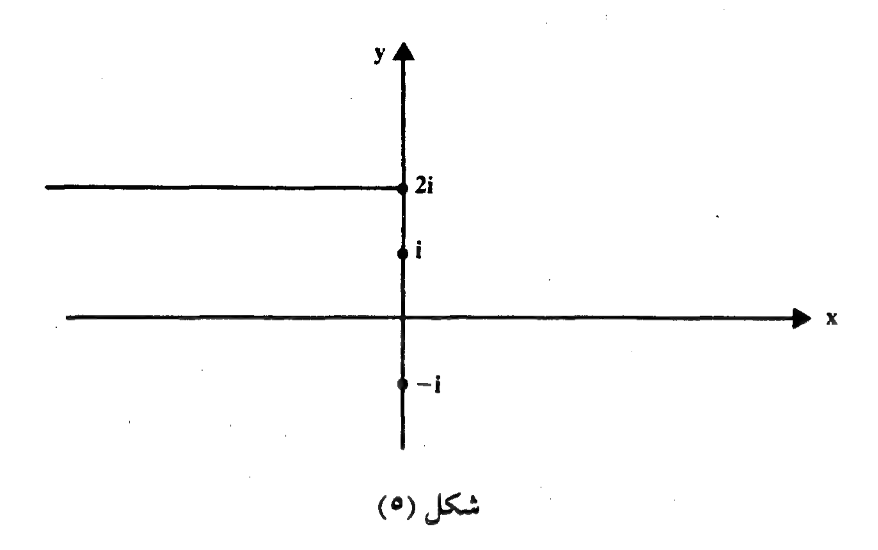
$$z = \pm i$$

وكـذلك فـإن الدالـة $\log (z - 2i)$ ليست تحليلية عنـد النقاط z التي تحقق الشرطين:

$$\operatorname{Im} \cdot (z - 2i) = 0 \;\;,\;\; \operatorname{Re} \cdot (z - 2i) \leqslant 0$$

ومن ذلـك فـإن $x \leqslant 0$ ، $y = 2$ وهـذا يمثـل نصف المستقيم $y = 2$ الأيسر. انظر الشكل (٥) وبالتالي فإن المجال الذي تكون عليه الدالـة f تحليلية يحتوي جميـع الأعداد المـركبة بـاستثناء الأعـداد المعرفـة بالمسـاواة التالية:

$$\{z \in \mathbb{C}: z = \pm i\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} \cdot z = 2 \,,\, \operatorname{Re} \cdot z \leqslant 0\}$$



شكل (٥)

وهذه المجموعة تمثل النقاط المتفردة للدالـة f منها النقـطتان $+i, -i$ متفـردة معزولـة أما البـاقي فهي متفردة ليست معـزولة. ويمثـل الشعاع المذكور فصل الفرع وكذلك 2i تمثل نقطة الفرع.

ب ـ لإيجاد الفرع للدالة $g(z)$ الذي يكون تحليلياً عنـد $z=0$ نلاحظ إمكـانية كتابة الدالة g على الصيغة التالية:

$$g\left(f(z)\right) = \log\left(f(z)\right)$$

حيث إن $f(z) = z^2 - 1$. وهذه الدالة $f(z) = z^2 - 1$ دالة تحليليـة على جميع الأعداد المركبة (أي أنها كليـة). ولذلـك يكفي إيجاد الفـرع للدالة $g(z) = \log z$ الذي يكون تحليلياً عند النقطة $z_0 = f(0) = -1$ وبما أن سعـة العدد $z_0 = -1$ هي π فـإننا نختـار مجـالاً يحتـوي عـلى النقـطة π وبالتالي يكون الفرع:

$$\text{Log}\, z = \ln r + \theta i \quad , \quad r > 0\, ,\, 0 < \theta \leqslant 2\pi$$

تحليلياً عند $z_0 = -1$ نستنتج من ذلك أن الفرع المطلوب هو الدالة:

$$g(z) = \text{Log}\,(z^2 - 1)\, ,$$
$$0 < \arg\,(z^2 - 1) \leqslant 2\pi\, ,\, |\, z^2 - 1\,| > 0$$

بالإضافة إلى ذلك فإن قيمة المشتقة g هي :

$$g'(z) = g'\left(f(z)\right) f'(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

ومن ذلك فإن :

$$g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = 0.$$

تمارين ٣ ـ ٢

١ ـ جد قيم كل مما يلي:

أ ـ $\log ei$ ب ـ $\log (1 + \sqrt{3}\, i)$

جـ ـ $\log e$ د ـ $\log (1 - i)$

٢ ـ جد قيم كل مما يلي:

أ ـ $\mathrm{Log}\, (-1)^2$ ب ـ $\mathrm{Log}\, (-1)$

جـ ـ $\mathrm{Log}\, (-1 + i)^2$ د ـ $\mathrm{Log}\, (-1 + i)$

هـ ـ $\mathrm{Log}\, ei$ و ـ $\mathrm{Log}\, e$

٣ ـ جد قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

أ ـ $\mathrm{Log}\, z = 1 + \frac{\pi}{3} i$ ب ـ $\log z = \frac{\pi}{4} i$

جـ ـ $\mathrm{Log}\, (2z + 1) = \frac{\pi}{2} i$ د ـ $e^z = ei$

هـ ـ $e^{2z} + e^z + 2 = 0$ و ـ $e^{z-1} = \frac{\pi}{6}$

٤ ـ بيِّن أن العلاقة بين $\log z$ و$\mathrm{Log}\, z$ هي:

$$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2n\pi i \ , \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

٥ ـ برهن فرع (ب) من نظرية ٥.

٦ ـ أ ـ بيِّن أن $e^{\log z} = z$ لأي عدد مركب z.

ب ـ بينها لأي عدد مركب z يكون:

$$\log e^z = z + 2n\pi i \ , \quad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

جـ ـ بيِّن أن $\log e^z = z$ لأي عدد مركب z إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$-\pi < \mathrm{Im} \cdot z \leq \pi$$

٧ ـ برهن أن $z^n = e^{n \log z}$

حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

٨ ـ بيِّن أن $\text{Log}\, z^n = n\, \text{Log}\, z$ قد لا يكون صواباً.

اقتراح: ابدأ بالفرض $n = 2, z = -1 + i$ مثلاً.

٩ ـ عرِّف الدالة $\log z$ كما يلي:

$$\log z = \ln r + \theta i,\ r > 0,\ \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$$

جد قيمة $\log i^2$ في هذا الفرع، ثم جد قيمة $2 \log i$ وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟ جد مجالاً للمتغير θ بحيث يكون:

$$\log i^2 = 2 \log i$$

١٠ ـ إذا فرض أن z, w تحققان الشرطين $\text{Re} \cdot z > 0$ و $\text{Re} \cdot w > 0$ فبيِّن أن:

$$\text{Log}\, zw = \text{Log}\, z + \text{Log}\, w$$

١١ ـ جد العلاقة بين $\text{Log}\, z$, $\text{Log}\,(1/z)$.

١٢ ـ جد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ ـ $f(z) = \log(z^3 + 3z)$

ب ـ $g(z) = z^2 \log 2z$

١٣ ـ جد الفرع للدالة $\log(z^2 - 2z + 5)$ الذي يكون تحليلياً عند النقطة $z = 1$.

١٤ ـ جد فرعا للدالة $\log(2z + i - 1)$ يكون تحليلياً على كل الأعداد المركبة باستثناء الأعداد المركبة في كل حالة مما يلي:

أ ـ $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} \cdot z \leqslant \frac{1}{2}\ ,\ \text{Im} \cdot z = -\frac{1}{2}\}$

ب ـ $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re} \cdot z \geqslant \frac{1}{2}\ ,\ \text{Im} \cdot z = -\frac{1}{2}\}$

١٥ ـ بيِّن أن الدالة:

$$f(z) = \frac{\log(z - 2 + 4i)}{z^2 + 4}$$

تحليلية على كل الأعداد الحقيقية باستثناء النقاط z التالية:

$\{2i, -2i\} \cup \{z \in \mathbb{C} : Re \cdot \leqslant 2, Im \cdot z = -4\}$

١٦ ـ برهِّن أن الدالة:

$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \tan^{-1}(y/x)$

تحليلية على كل الأعداد المركبة z بحيث إن $Re \cdot z > 0$ ثم استنتج أن $\tan^{-1}(y/x)$ يمثل مرافقاً توافقياً للدالة التوافقية $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

١٧ ـ ابحث عن فرع للدالة $\log(z+4)$ يكون تحليلياً عند $z=-5$ ويأخذ القيمة $7\pi i$ هناك.

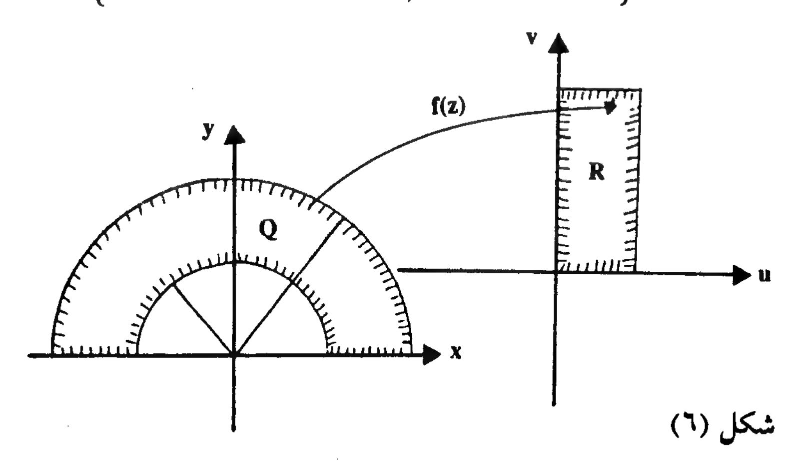
١٨ ـ بعكس سلوك الدالة الأسية بيِّن أن الدالة وحيدة القيمة:

$w = f(z) = Log\, z \;,\; |z| > 0 \;,\; -\pi < Im \cdot z < \pi$

تنقل المنطقة Q إلى R حيث إن:

$Q = \{z \in \mathbb{C}: 1 \leqslant |z| \leqslant e^2 , 0 \leqslant Arg\, z \leqslant \pi\}$

$R = \{w \in \mathbb{C}: 0 \leqslant Re \cdot w \leqslant 2, 0 \leqslant Im \cdot w \leqslant \pi\}$



شكل (٦)

٣ ـ ٣ الأسس المركبة:

بالاستعانة بالدالتين الأسية واللوغاريتمية نستطيع تعريف الأسس المركبة كما هو موضح في التعريف التالي:

تعريف ٢:

لأي عدد مركب $z \neq 0$ ولأي عدد مركب α فإن:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} \quad \ldots\ldots (٣ - ٢١)$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن الدالة z^{α} ترث كثيراً من خصائص الدالة اللوغاريتمية $\log z$ منها أن الدالة $f(z) = z^{\alpha}$ متعددة القيمة ولها نفس فروع الدالة $\log z$ وبالتالي فإن الفرع الرئيسي لها هو:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\alpha \{\ln|z| + (\operatorname{Arg} z)i\}},$$

$$|z| > 0 \quad , \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$$

وكذلك فصل الفرع هو الشعاع $y = 0, x \leqslant 0$. والنقطة $z = 0$ تمثل نقطة الفرع لأنها متفردة ومشتركة لجميع الفروع للدالة.

مثال ٦:

جد قيم $(-i)^{2i}$ ثم جد القيمة الرئيسية لها.

الحل:

بتطبيق تعريف ٢ نستنتج أن:

$$(-i)^{2i} = e^{2i \log(-i)}$$

وبما أن:

$$\log(-i) = \ln|-i| + \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i,$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فإن :

$$(-i)^{2i} = e^{2i\{(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i\}}$$

$$= e^{(4n+1)\pi} \quad , \quad n = 0, \pm 1, ...$$

أما القيمة الرئيسية فهي :

$$(-i)^{2i} = e^{2i \, Log(-i)}$$

$$= e^{2i(-\frac{\pi}{2})i} = e^{\pi}.$$

النظرية التالية تبحث قابلية z^{α} للاشتقاق.

نظرية ٦ :

الدالة وحيدة القيمة :

$$f(z) = z^{\alpha} \quad , \quad |z| > 0, -\pi < Arg\, z < \pi$$

قابلة للاشتقاق بل هي تحليلية على جميع الأعداد المركبة باستثناء الأعداد المركبة التي تحقق $Im \cdot z = 0, Re \cdot z \leqslant 0$. وقيمة المشتقة عندئذ هي :

$$(\text{٢٢ - ٣}) \; .... \; f'(z) = \frac{d}{dz} (z^{\alpha}) = \alpha z^{\alpha - 1}$$

البرهان :

بما أن :

$$f(z) = z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

فإن قانون السلسلة يبيّن أن :

$$f'(z) = \frac{d}{dz} (z^{\alpha}) = \frac{d}{dz} (\alpha \log z) e^{\alpha \log z}$$

$$= \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \frac{\alpha}{z} z^{\alpha}$$

$$= \alpha z^{\alpha - 1}$$

لجميع قيم z التي تكون الدالة log z عندها تحليلية وبالتالي فإن الدالة z^α ليست تحليلية عند الأعداد التي لا تكون عندها الدالة log z تحليلية وهي تلك الأعداد التي تحقق:

$$\text{Re} \cdot z \leqslant 0 \;\; , \;\; \text{Im} \cdot z = 0$$

مثـال ٧:

أما الدالة α^z حيث α عدد مركب غير الصفر و z متغير مركب فهي كذلك معرّفة بما يلي:

$$(٢٣ - ٣) \; \ldots . \; \alpha^z = e^{z \log \alpha}$$

وبما أن log α عدد مركب ثابت فإن الدالة $f(z) = \alpha^z$ ترث خصائص الدالة e^z فإذا كانت α لا تقع على الشعاع $r \geqslant 0 \, , \, \theta = \pi$ (أي على النصف السالب للمحور x) فإن log α عدد مركب وبالتالي فإن الدالة $f(z) = \alpha^z$ تكون كلية أي تحليلية على جميع المستوي المركب وقيمة المشتقة لها هي:

$$(٢٤ - ٣) \; \ldots . \; f'(z) = \alpha^z \cdot \log \alpha$$

لاحظ أن الصيغة تتوافق مع الدالة الأسية الحقيقية.

مثـال ٨:

جد قيمة 1^2.

الحـل:

حسب التعريف فإن القيمة المطلوبة هي:

$$1^2 = e^{2 \log 1} = e^{2 \, (\ln 1 \, + \, 2n \pi i)}$$
$$= e^{4n\pi i} \; , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

أما القيمة الرئيسة للعدد 1^2 فهي:

$$1^2 = e^{2 \log 1} = e^0 = 1$$

ماذا تستنتج من هذا المثال؟

مثـال ٩:

جد القيم المختلفة للمقدار $e^{\frac{1}{k}\log z}$

الحـل:

حسب تعريف الأسس المركبة فإن:

$$e^{\frac{1}{k}\log z} = z^{\frac{1}{k}}$$

وبالاستفادة من الشكل القطبي للعدد المركب $z = re^{i(\phi+2n\pi)}$ حيث إن $\phi = \text{Arg}\, z \quad , \quad r = |z|$ نستنتج:

$$e^{\frac{1}{k}\log z} = r^{\frac{1}{k}}\, e^{i(\phi + 2n\pi)/k} \quad , \quad n = 0, \pm1, \ldots.$$

وبما أن الطرف الأيمن له k قيمة مختلفة فإن $e^{\frac{1}{k}\log z}$ له k قيمة مختلفة هي:

$$e^{(\log z)/k} = r^{1/k}\, e^{i(\phi + 2n\pi)/k} \quad , \quad n = 0, \pm1, \ldots \quad \ldots.\ (٣ - ٢٥)$$

تمارين ٣ - ٣

١ - جد قيم الأسس المركبة التالية:

أ - $(2i)^i$ ب - $(-1)^{2/3}$

جـ - $(i)^{3/4}$ د - $(-i)^{\pi i}$

هـ - $(1+i)^{i-2}$ و - π^{-i}

٢ - جد القيمة الرئيسية للأسس المركبة التالية:

أ - $(2+i)^{2+i}$ ب - $2^{\sqrt{2}}$ جـ - 3^{π}

٣ - جد قيم $(1-\sqrt{3}\, i)^{2/3}$ بثلاث طرق مختلفة.

اقتراح: أولاً بالتعريف ثم بإيجاد $[(1-\sqrt{3}\, i)^2]^{1/3}$

ثم بإيجاد $[(1-\sqrt{3}\, i)^{1/3}]^2$.

٤ - برهن لأي عددين مركبين α, β ولأي عدد مركب $z \neq 0$ فإن المتطابقات التالية صحيحة فقط في حالة الفرع الرئيسي للدالة الأسية:

أ - $z^{\alpha} \cdot z^{\beta} = z^{\alpha+\beta}$

ب - $z^{\alpha} / z^{\beta} = z^{\alpha-\beta}$

جـ - $1/z^{\beta} = z^{-\beta}$

٥ - برهن أو إنفِ صحة المساواة التالية:

القيمة الرئيسية للمقدار $(z \cdot w)^{\alpha}$ = القيمة الرئيسية للمقدار $z^{\alpha} \cdot w^{\alpha}$

حيث إن α, z, w أعداد مركبة. بحيث إن $z \neq 0$ و $w \neq 0$.

٦ - استعن بالشكل القطبي للعدد المركب لإيجاد الجزء الحقيقي والتخيلي للفرع الرئيسي للدالة $f(z) = z$.

٧ - جـد الفرع الرئيسي للدالة $f(z) = z^{1/2}$ جـد نقطة الفـرع وكذلـك فصـل الفرع لها.

٨ - جـد المشتقـة للدوال التـاليـة حيثـما وجـدت ثم جـد النقـاط المتفـردة (إن وجدت) لهذه الدوال:

أ - $f(z) = z^{(1 + \sqrt{3}\, i)}$

ب - $f(z) = i^{z}$

جـ - $f(z) = z^{\sqrt{3}}$

د - $f(z) = 2^{2z}$

٩ - برهن المساواة التالية لأي عدد مركـب z.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n} = e^{z}$$

اقـتراح: استعن بتعريف الأسس المـركبة ثم بخـاصيـة الاتصـال ثم طبق قانون لوبيتال لإيجاد النهاية.

١٠ - جـد فرعـاً للدالة $f(z) = (z^{2} - 1)^{1/2}$ يكـون تحليلياً عـلى جميـع الأعـداد المركبة باستثناء تلك التي تنتمي للمجموعة التالية:

$$Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \cdot z| < 1 \ , \ \operatorname{Im} \cdot z = 0\}$$

اقتراح: استعن بتمرين (٧).

٣ ـ ٤ الدوال المثلثية:

نستطيع بالاستفادة من صيغة يولر:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta,\ e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إيجاد تعريف «مركب» للدوال المثلثية الحقيقية بالصيغة التالية:

$$\text{(٢٦ - ٣)} \ \ldots\ldots \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)$$

$$\text{(٢٧ - ٣)} \ \ldots\ldots \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right)$$

وهذه الصيغ تقترح تعريفاً مماثلاً للدوال المثلثية المركبة كما في التعريف التالي:

تعريف ٣:

لأي عدد مركب z فإن الدالتين المثلثيتين $\sin z$، $\cos z$ تعرفان بالمتساويتين التاليتين:

$$\text{(٢٨ - ٣)} \ \ldots\ldots \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right)$$

$$\text{(٢٩ - ٣)} \ \ldots\ldots \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right)$$

إن هذه الدوال المركبة $\sin z, \cos z$ ترث كثيراً من صفات الدالة الأسية المركبة وهي كذلك تتصف بصفات كثيرة مشتركة مع مثيلاتها الحقيقية، إن كثيراً من خصائص الدوال المثلثية الحقيقية تبقى صواباً للدوال المثلثية المركبة. سنذكر بعضاً من هذه الخصائص دون برهان للتمثيل فقط، ولكن سنبرهن بعض الخصائص التي ليس لها شبهاً للدوال الحقيقية.

النظرية التالية تحتوي بعض الخصائص المشتركة.

نظرية ٧:

لأي عددين مركبين z, w فإن الجمل التالية صائبة.

أ ـ $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .... (٣ ـ ٣٠)

ب ـ $\cos(-z) = \cos z, \sin(-z) = -\sin z$ .... (٣ ـ ٣١)

جـ ـ $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ .... (٣ ـ ٣٢)

د ـ $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$ .... (٣ ـ ٣٣)

هـ ـ $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ .... (٣ ـ ٣٤)

النظرية التالية تحتوي بعض الخصائص التي تنفرد بها الدوال المثلثية المركبة.

نظرية ٨:

أ ـ الدوال $\sin z, \cos z$ دورية بدورة مقدارها 2π. أي أن:

$\cos(z + 2\pi) = \cos z$ .... (٣ ـ ٣٥)

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$ .... (٣ ـ ٣٦)

ب ـ هذه الدوال كلية أي أنها تحليلية على كل المستوي المركب وكذلك:

$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$ .... (٣ ـ ٣٧)

جـ ـ $\cos z = 0$ إذا وإذا فقط:

$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..$ .... (٣ ـ ٣٨)

وكذلك: $\sin z = 0$ إذا وإذا فقط:

$z = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$ .... (٣ ـ ٣٩)

د ـ $\sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ .... (٣ ـ ٤٠)

$\cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ .... (٣ ـ ٤١)

هـ ـ $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ .... (٣ ـ ٤٢)

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ .... (٣ ـ ٤٣)

البرهان:

نبرهن بعض هذه الفروع ونترك إثبات بقية الفروع تمريناً للقارىء.

لإثبات الفرع (أ) نستفيد من كون الدالة الأسية المركبة دورية لنستنتج أن:

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + e^{-zi}\right) = \cos z$$

ولإثبات الفرع (ب) نستنتج من كون الدالة الأسية المركبة كلية أن الدوال المثلثية $\cos z$ و $\sin z$ كلية كذلك وأن:

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(ie^{zi} - ie^{-zi})$$

$$= \frac{-1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi})$$

$$= -\sin z$$

أما الفرع (جـ) فإن المساواة $\sin z = 0$ تصح إذا وإذا فقط:

$$\frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = 0$$

ومنها ينتج أن $e^{zi} = e^{-zi}$ أي أن $e^{2zi} = 1$ وهذا يصح إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$2zi = 2n\pi i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

وبالتبسيط يكون الشرط:

$$z = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ومن تعريف الدالة $\sin z$ فإن:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}) = \frac{1}{2i}(e^{-y}e^{xi} - e^{y}e^{-xi})$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\sin x + i\,\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})\,\text{cox}\,x$$

$$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

وهذا يثبت جزءاً من فرع (د)

وأخيراً نبرهن جزءاً من الفرع (هـ) لذلك نستفيد من الفرع (د) السابق حيث إن:

$$| \sin z |^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

وبإضافة وطرح المقدار $\sin^2 x \sinh^2 y$ نحصل على:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + (\cos^2 x + \sin^2 x) \sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x + \sinh^2 y$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

مثال ١٠:

جد جميع قيم z التي تحقق المعادلة:

$$\sin z = \cosh 2$$

الحل:

بالاستفادة من الفرع (د) من النظرية السابقة نستنتج أن:

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \cosh 2$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية معاً ومساواة الأجزاء التخيليّة معاً نستنتج أن:

$$\cos x \sinh y = 0 \ ,$$
$$\sin x \cosh y = \cosh 2$$

وبفرض $\sinh y = 0$ فإن $y = 0$ وبفرض أن $\cos x = 0$ فإن:

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) , \ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

بما أن الطرف الأيمن في المعادلة الثانية $\cosh 2$ موجباً فإن الطرف الأيسر يجب أن يكون موجباً مما يحتّم أن تكون $\sin x$ موجبة لذلك نتخلص من قيم x التي تجعل $\sin x$ سالبة وهي قيم n الفردية وبالتالي فإن:

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) , \ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

وفي هذه الحالة تكون $\sin x = 1$ وبالتالي فإن المعادلة الثانية تصبح:

$$\cosh y = \cosh 2$$

ومن كون الدالة $\cosh y$ دالة زوجية فإن $y = -2, +2$ وبهذا تصبح قيم z التي تحقق المعادلة هي اتحاد المجموعتين R و Q حيث:

$$R = \left\{z \in \mathbb{C}: \text{Re} \cdot z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \wedge \text{Im} \cdot z = \pm 2\right\}$$

$$Q = \left\{z \in \mathbb{C}: \text{Im} \cdot z = 0 \ , \ \text{Re} \cdot z = \sin^{-1}(\cos 2)\right\}$$

مثال ١١:

استخدم كون الدالة $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ تحليلية لإثبات المتطابقة المذكورة في فرع (أ) من النظرية ٧.

الحل:

بما أن كلاً من الدوال المثلثية $\cos z, \sin z$ تحليلية على جميع الأعداد المركبة فإن الدالة:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$$

تحليلية وبالتالي قابلة للاشتقاق على جميع الأعداد المركبة وبإيجاد المشتقة نجد أن:

$$f'(z) = -2\cos z \sin z + 2\sin z \cos z = 0$$

لكل عدد مركب z وهذا يدلنا على أن الدالة f دالة ثابتة القيمة أي يوجد عدد مركب α بحيث إن:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z = \alpha$$

لجميع قيم z وبفرض أن z = صفر نستنتج أن $\alpha = 1$ وبالتالي فإن:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

مثـال ١٢:

بيِّن أن:

أ ـ $\sin (yi) = i \sinh y$ .... (٣ ـ ٤٤)

ب ـ $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ .... (٣ ـ ٤٥)

الحـل:

بالاستفادة من الخاصة (د) من نظرية ٨ وهي:

$$\sin (x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

بالتعويض بدلاً من x القيمة 0 ينتج أن:

$$\sin (yi) = i \cos 0 \sinh y = i \sinh y$$

وهذا يثبت الفرع (أ).

ولإثبات الفرع (ب) نستفيد من نفس المتطابقة السابقة لإيجاد المرافق المركب:

$$\overline{\sin z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

بينما:

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh (-y) + i \cos x \sinh (-y)$$

وبما أن الدالة cosh y زوجية بينما الدالة sinh y فردية نستنتج أن:

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sin hy$$

وبالمقارنة نستنتج أن:

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

إن بقية الدوال المثلثية الحقيقية يمكن أن يعاد تعريفها بشكل طبيعي لتصبح دوالاً مركبة مثل:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} \quad .... (٣ ـ ٤٦)$$

وبالمثال فإن هذه الدوال لها نفس الخصائص تقريباً التي تملكها الدوال المماثلة الحقيقية، نذكر منها المشتقة مثلاً:

$$\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z \quad \ldots\ldots (٣ - ٤٧)$$

$$\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z \quad \ldots\ldots (٣ - ٤٨)$$

$$\frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z \quad \ldots\ldots (٣ - ٤٩)$$

$$\frac{d}{dz}(\cot z) = -\csc^2 z. \quad \ldots\ldots (٣ - ٥٠)$$

تمارين ٣ ـ ٤

١ ـ اكتب ما يلي على الصيغة $u + vi$ ثم جد قيمتها:

أ ـ $\cos(1 - i)$ ب ـ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$

جـ ـ $\sec 2i$ د ـ $\tan \frac{\pi + 4i}{4}$

٢ ـ تحقق مما يلي:

أ ـ $\sin(\pi - z) = \sin z$

ب ـ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

جـ ـ $\cos(\pi + z) = -\cos z$

د ـ $\tan(z + \pi) = \tan z$

٣ ـ برهن فروع نظرية ٧.

٤ ـ برهن الأجزاء التي لم تبرهن في النظرية ٨.

٥ ـ برهن المتطابقات التالية:

أ ـ $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

ب ـ $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$

جـ ـ $2\sin z \cos w = \sin(z + w) + \sin(z - w)$

د ـ $2\sin z \sin w = \cos(z - w) - \cos(z + w)$

٦ ـ بالاستعانة بالفرع هـ من نظرية ٨ برهن أن:

أ ـ $|\sin x| \leqslant |\sin z|$

ب ـ $|\cos x| \leqslant |\cos z|$

٧ - بالاستعانة بالفرع هـ من نظرية ٨ برهن أن:

أ - $| \sinh y | \leq | \sin z | \leq \cosh y$

ب - $| \sinh y | \leq |\cos z| \leq \cosh y$

٨ - بالاستعانة بالتمرين السابق برهن أن: $| \cos z |^2 + | \sin z |^2 \geq 1$

ثم جد شرطاً لتتحقق المساواة فقط.

٩ - جد جميع قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

أ - $\cos z = \cosh 2$

ب - $\cos z = 4$

جـ - $\sin z = \pi i$

د - $\sin z = i \sinh 1$

١٠ - جد المشتقة لكل من الدوال التالية:

أ - $f(z) = \cos (1/z)$

ب - $f(z) = \sin (z^3)$

جـ - $f(z) = z^2 \sec z$

د - $f(z) = z \cot z$

١١ - بيِّن أن كلاً من $\sin \bar{z}$, $\cos \bar{z}$ ليست تحليلية على أي عدد مركب.

١٢ - بيِّن أن e^{zi} دورية بدورة مقدارها 2π ثم جد جذور المعادلة $e^{zi} + 1 = 0$

ثم بيِّن أن: $e^{zi} = \cos z + i \sin z$

لكل عدد مركب z.

١٣ - برهن أن:

أ - $\cos yi = \cosh y$

ب - $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$

١٤ ـ بنفس أسلوب برهان مثال ١١ برهن المتطابقة:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

اقتراح: افرض أن:

$$g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z \quad , \quad f(z) = \cos 2z$$

ثم بينّ أن $f'(z) = g'(z)$ لجميع قيم z ثم أكمل البرهان.

١٥ ـ بينّ أن:

أ ـ $\cos(\bar{z}\, i) = \overline{\cos(zi)}$ لجميع قيم z.

ب ـ $\sin \bar{z}\, i = \overline{\sin(zi)}$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط.

$$z = n\pi i \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

١٦ ـ أ ـ بينّ أن الدالة $\cos x \sinh y$ هي المرافق التوافقي للدالة التوافقية $\sin x \cosh y$.

ب ـ بينّ أن الدالة $\sin x \sinh y$ ليست المرافق التوافقي للدالة التوافقية $\cos x \cosh y$ ثم جد المرافق التوافقي لها.

١٧ ـ بينّ أن $\lim_{|y| \to \infty} |\sin yi| = \infty$ ثم استنتج أن:

$$\lim_{|y| \to \infty} |\sin(x_0 + yi)| = \infty$$

اقتراح: استفد من الخاصية:

$$\sin(yi) = i \cdot \sinh y$$

٣ ـ ٥ الدوال الزائدية:

يمكننا تعريف الدوال الزائدية المركبة بشكل طبيعي بالمعادلات التالية:

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥١)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٢)$$

لأي عـدد مركب z. هنـاك خصائص مشـتركة بـين هذه الـدوال في الحـالـة الحقيقية والمركبة وهناك خصائص أخرى تنفرد بها الدوال المركبة. النظرية التالية تتضمن بعض الخصائص المشتركة.

نظرية ٩:

لأي عددين مركبين z, w تكون الجمل التالية صحيحة:

أ ـ $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٣)$

ب ـ $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٤)$

جـ ـ $\sinh (z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٥)$

د ـ $\cosh (z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٦)$

هـ ـ $\cosh (-z) = \cosh z \ , \ \sinh (-z) = -\sinh z \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٥٧)$

والنظرية التالية تتضمن بعض الحقائق التي تنفرد بها الدوال الزائدية المركبة.

نظرية ١٠:

لأي عدد مركب z فإن الجمل التالية صحيحة:

أ ـ الدالتان sinh z, cosh z تحليليتان وكذلك:

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z, \ \frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad \ldots\ldots (٣ ـ ٨٥)$$

ب ـ الدالتان $\cosh z, \sinh z$ دوريتان بدورة مقدارها $2\pi i$ أي أن:

$$\cosh (z + 2\pi i) = \cosh z, \sinh (z + 2\pi i) = \sinh z \quad \text{.... (٣ - ٥٩)}$$

جـ ـ

$$\cosh (zi) = \cos z, \sin (zi) = i \sin z \quad \text{.... (٣ - ٦٠)}$$

$$\sin (zi) = i \sinh z , \cos (zi) = \cosh z \quad \text{.... (٣ - ٦١)}$$

د ـ

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad \text{.... (٣ - ٦٢)}$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad \text{.... (٣ - ٦٣)}$$

هـ ـ

$$| \sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y \quad \text{.... (٣ - ٦٤)}$$

$$| \cosh z |^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \quad \text{.... (٣ - ٦٥)}$$

إن الدوال المثلثية كما أن الدوال الزائدية تعتمد في تعريفها على الدالة الأسية المركبة وبالتالي فإن أساليب برهنة الخصائص في النظريات السابقة تشبه برهنة الخصائص المماثلة للدوال المثلثية لذلك نتركها تمريناً للقارىء.

كذلك يمكن تعريف بقية الدوال الزائدية بشكل طبيعي كما يلي:

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{.... (٣ - ٦٦)}$$

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \quad \text{.... (٣ - ٦٧)}$$

وهي تملك الخصائص نفسها التي تملكها الدوال الحقيقية ذاتها. مثلاً:

$$\frac{d}{dz} (\tanh z) = \operatorname{sech}^2 z, \quad \text{.... (٣ - ٦٨)}$$

$$\frac{d}{dz} (\coth z) = -\operatorname{csch}^2 z, \quad \text{.... (٣ - ٦٩)}$$

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{sech} z) = -\operatorname{sech} z \tanh z, \quad \text{.... (٣ - ٧٠)}$$

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{csch} z) = -\operatorname{csch} z \coth z. \quad \text{.... (٣ - ٧١)}$$

مثـال ١٣:

جد جميع قيم z التي تحقق المعادلة:

$$\sinh z = 0$$

الحـل:

بالاستفادة من الخاصية (د) من النظرية السابقة نستنتج أن:

$\sinh x \cos y = 0,$

$\cosh x \sin y = 0.$

بما أن $\cosh x$ في المعادلـة الثانيـة ليـس صفـراً لجميـع قيم x الحقيقية فإن $\sin y = 0$ وبالتالي $y = n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

ومن ذلك فإن $\cos y$ في المعادلة الأولى تأخذ إحـدى القيمتين $+1, -1$ اعتـماداً على كـون n زوجية أو فـردية وهـذا يحتم كون $\sinh x = 0$ أي أن $x = 0$ فقط التي تحقق المعادلتين معاً لذلك تكون أصفار المعادلة المطلوبة هي:

$$z = n\pi i \,, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad \ldots\ldots (٣ - ٧٢)$$

لنذكر أن الـدالة $g(z)$ تمثـل الدالـة العكسية للدالـة $f(x)$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

$$f\left(g(z)\right) = z \quad , \quad g\left(f(z)\right) = z$$

وبلغـة أخرى فـإن معكوس الـدالة $w = f(z)$ هـو $z = f^{-1}(w)$ وعليـه. فـإن معكوسات الدوال المثلثية المركبة والزائدية المركبة تعرف بما يلي:

$$w = \sin^{-1} z \iff z = \sin w \quad \ldots\ldots (٣ - ٧٣)$$

$$w = \cos^{-1} z \iff z = \cos w \quad \ldots\ldots (٣ - ٧٤)$$

$$w = \sinh^{-1} z \iff z = \sinh w \quad \ldots\ldots (٣ - ٧٥)$$

$$w = \cosh^{-1} z \iff z = \cosh w \quad \ldots\ldots (٣ - ٧٦)$$

وهكـذا ويمكن إعطاء تعـريف آخر لكـل من هذه المعكـوسات اعتـماداً عـلى الدالة اللوغاريتمية كما تبيّن الأمثلة التالية:

مثـال ١٤:

بيِّن أن: $\cos^{-1} z = -i \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}]$ .... (٣ - ٧٧)

الحـل:

إذا فرض أن $w = \cos^{-1} z$ فإن: $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{wi} + e^{-wi})$

وبضرب المعادلة السابقة بالمقدار $2e^{wi}$ نستنتج أن: $(e^{wi})^2 - 2ze^{wi} + 1 = 0$

وبإيجاد جذور هذه المعادلة التربيعية نحصل على:

$$e^{wi} = \frac{2z + (4z^2 - 4)^{1/2}}{2}$$

$$= z + i(1 - z^2)^{1/2}$$

وعليه فإن:

$$w = \frac{1}{i} \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}],$$

$$\cos^{-1} z = -i \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}]$$

لاحظ أن الطرف الأيمن يمثل دالة متعددة القيمة وكذلك يوجد قيمتان للجذر: $(1 - z^2)^{1/2}$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$\sin^{-1} z = -i \log [zi + (1 - z^2)^{1/2}],$ .... (٣ - ٧٨)

$\tan^{-1} z = \frac{1}{2} i \log [(i + z)/(i - z)],$ .... (٣ - ٧٩)

$\sinh^{-1} z = \log [z + (z^2 + 1)^{1/2}],$ .... (٣ - ٨٠)

$\cosh^{-1} z = \log [z + (z^2 - 1)^{1/2}],$ .... (٣ - ٨١)

$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log [(1 + z)/(1 - z)].$ .... (٣ - ٨٢)

إن هذا التعريف للدوال المثلثية والزائدية العكسية يسهل عملية إيجاد المشتقة لكل من هذه الدوال، كما يشير المثال التالي:

مثـال ١٥:

بيِّن أن:

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad .... \quad (٣ - ٨٣)$$

الحـل:

بالاستعانة بالخاصية (٣ - ٧٨) فإن:

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{-i\left\{ i + \frac{1}{2}(1 - z^2)^{-1/2}(-2z) \right\}}{zi + (1 - z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{zi + (1 - z^2)^{1/2}}{\sqrt{1 - z^2}\left\{ zi + (1 - z^2)^{1/2} \right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} .$$

وبالمثال يمكن إثبات أن:

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1} z) = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}} , \quad .... \quad (٣ - ٨٤)$$

$$\frac{d}{dz}(\tan^{-1} z) = \frac{1}{1 + z^2} , \quad .... \quad (٣ - ٨٥)$$

$$\frac{d}{dz}(\sinh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} , \quad .... \quad (٣ - ٨٦)$$

$$(\text{٨٧ - ٣}) \ldots \quad \frac{d}{dz}(\cosh^{-1} z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} ,$$

$$(\text{٨٨ - ٣}) \ldots \quad \frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1 - z^2} .$$

نختم هذا البند بالمثال التالي:

مثـال ١٦:

جد قيمة ما يلي: $\cos^{-1}\sqrt{3} \quad , \quad \sinh^{-1}(i)$

الحـل:

من المتطابقة (٣ - ٧٧) فإن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i \log\left[\sqrt{3} + i(1-3)^{1/2}\right]$$

$$= -i \log\left[\sqrt{3} \pm i\sqrt{2}\, i\right]$$

من ذلك ينتج حالتان، الأولى:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i \log\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right]$$

والثانية:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i \log\left[\sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$$

وبما أن العددين $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ حقيقيان موجبان فإن:

$$\text{Arg}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right) = 0$$

أي أن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\left\{\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + 2n\pi i\right\},$$

أو:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = -i\left\{\ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + 2n\pi i\right\},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

وأخيراً فإن:

$$\cos^{-1}\sqrt{3} = \left\{ 2n\pi - i\ln\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2} \right) \right\},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

وكذلك من المتطابقة (٣ ـ ٨٠) فإن:

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}(i) &= \log\left[i + (-1+1)^{1/2} \right] \\ &= \log i \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) i, \end{aligned}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

تمارين ٣ ـ ٥

١ ـ جد ما يلي:

أ ـ $\sinh\left(\frac{\pi}{2}\, i\right)$ ب ـ $\cosh(-1+\pi i)$

جـ ـ $\cos^{-1}\sqrt{2}$ د ـ $\sin^{-1} i$

هـ ـ $\tanh^{-1} 1$ و ـ $\sinh^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\, i\right)$

٢ ـ جد جميع قيم z التي تحقق المعادلة في كل مما يلي:

أ ـ $\sin z = \frac{\pi}{2}\, i$ ب ـ $\cos z = \cosh 2$

جـ ـ $\sinh z = -i$ د ـ $\tanh z = \frac{1}{2}$

٣ ـ برهن الخصائص المذكورة في نظرية ٩.

٤ ـ برهن الخصائص المذكورة في نظرية ١٠.

٥ ـ جد قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

أ ـ $\cosh z = 0$ ب ـ $\tan h\, z = 0$

٦ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٧٨)

٧ ـ برهن المتطابقة ٣ ـ ٧٩)

٨ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٠)

٩ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨١)

١٠ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٢)

١١ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٤)

١٢ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٥)

١٣ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٦)

١٤ ـ برهن المتطابقة (٣ ـ ٨٧)

١٥ - برهن المتطابقة (٣ - ٨٨)

١٦ - لأي عدد مركب $z = x + yi$ برهن أن:

$$| \sinh z | = | \sin (-y + xi) |$$

١٧ - برهن أن الدالة $\tan z$ دورية بدورة مقدارها π.

١٨ - برهن أن الدالة $\tanh z$ دورية بدورة مقدارها πi.

١٩ - برهن المتطابقة:

$$\sin^{-1} z + \cos^{-1} z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

لأي عدد مركب z وحيث إن:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

٢٠ - برهن ما يلي:

أ - $\sinh (z + \pi i) = -\sinh z$

ب - $\cosh \bar{z} = \overline{\cos hz}$

جـ - $\sin (zi) = i \sinh z$

د - $\sinh \bar{z} = \overline{\sin hz}$

هـ - $\cosh (zi) = \cos z$

٢١ - برهن المتباينة التالية:

$$|\sinh x| \leqslant |\cosh z| \leqslant \cosh x$$

لأي عدد مركب $z = x + yi$.

٢٢ - جد المشتقة الأولى للدوال التالية:

أ - $f(z) = (\sinh z^2 + 1)^{3/2}$

ب - $f(z) = \cosh^{-1} (i + z^2)$

٢٣ ـ بيِّن أن الدالتين $\sinh \bar{z}$, $\cosh \bar{z}$ ليستا تحليليتين عند أي عدد مركب.

٢٤ ـ برهن ما يلي:

أ ـ $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

ب ـ $$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z} = 0$$

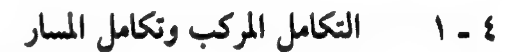
اقتراح: استفد من تعريف المشتقة:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

الفصل الرابع

التكامل المركب

COMPLEX INTEGRATION



الفصل الرابع

التكامل
Integration

تحدثنا في الفصل الثاني عن قابلية الدوال المركبة للاشتقاق وتعرفنا على صنف هام من الدوال المركبة تلك هي الدوال التحليلية على مجال ما. وفي هذا الفصل نتحدث عن قابلية التكامل للدوال المركبة، لنجد أن الدوال التحليلية تملك خصائص تكاملية ممتازة وترث كل الخصائص تقريباً المعروفة في التفاضل والتكامل. فنبدأ بأبسط أنواع التكامل المركب مروراً بتكامل المسار وعلاقته بنظرية غرين المعروفة في التحليل المتجه ثم نعرف خاصية الاستقلالية عن المسار للدوال التحليلية، ولصنف خاص من المسارات نتحدث عن نظرية كوشي كورسات. هذا كله في البندين الأول والثاني. أما البند الثالث فخصص لنظرية كوشي للتكامل المركب ونتائجها في البند الرابع. أما التطبيقات فستكون في البند الخامس.

٤ ـ ١ التكامل المركب وتكامل المسار:

الدالة المركبة $f = u + vi$ يمكن أن تعتمد على متغير واحد فقط بدلاً من متغيرين x , y، ويتم ذلك عندما تكون كل من الدالتين u , v حقيقية بمتغير واحد t وبالتالي تأخذ الدالة المركبة f الشكل التالي:

$$f(t) = u(t) + i\, v(t) \ , \ a \leqslant t \leqslant b \ldots \qquad (٤ - ١)$$

وتكامل هذا الصنف من الدوال هو أبسط أنواع التكامل المركب وهو معرف فيما يلي:

تعريف ١:

بفرض أن الدالة المركبة f تأخذ الشكل ٤ ـ ١ فإن:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b u(t)\,dt\right) + i\left(\int_a^b v(t)\,dt\right) \quad \ldots\ldots (٤ - ٢)$$

ويتم ايجاد قيمة تكاملات الطرف الأيمن للمساواة ٤ ـ ٢ بالطرق التقليدية لايجاد التكامل في التفاضل والتكامل.

مثـال ١:

جد قيمة التكامل $\int_0^{\pi/3} e^{ti}\,dt$

الحـل:

بما أن $e^{ti} = \cos t + i \sin t$

يتوافق مع الشكل ٤ ـ ١ فإن التعريف ١ يؤكد أن:

$$\int_0^{\pi/3} e^{ti}\,dt = \left(\int_0^{\pi/3} \cos t\,dt\right) + i\left(\int_0^{\pi/3} \sin t\,dt\right)$$

$$= \sin t \Big|_0^{\pi/3} + i\,(-\cos t)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\right).$$

لاحظ أن قيمة التكامل المركب عدد مركب.

إن كثيراً من خصائص التكامل يتوارثها بشكل طبيعي التكامل المركب (٤ ـ ٢) بالإضافة إلى بعض الصفات المكتسبة، النظرية التالية تتضمن بعض تلك الصفات:

نظرية ١ :

بفرض أن الدالتين f , g تأخذان الشكل ٤ ـ ١ فإن :

أ ـ $$\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٣)$$

ب ـ لأي عدد حقيقي c فأن :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٤)$$

جـ ـ لأي عدد مركب α فإن :

$$\int_a^b \alpha f(t)\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٥)$$

د ـ $$\text{Re.}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \big(\text{Re. } f(t)\big)\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٦)$$

$$\text{Im.}\left(\int_a^b f(t)\, dt\right) = \int_a^b \big(\text{Im. } f(t)\big)\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٧)$$

هـ ـ $$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \quad \ldots\ldots (٤ - ٨)$$

و ـ إذا فرض أن $a \leqslant t \leqslant b; \quad F(t) = U(t) + i\, V(t)$

بحيث إن $a \leqslant t \leqslant b, \quad V'(t) = v(t), U'(t) = u(t)$

فإن :

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) \quad \ldots\ldots (٤ - ٩)$$

البرهـان :

الخاصيتان أ، جـ تمثلان الخصائص الخطية للتكامل، أما الخاصية (ب) فهي الخاصية التجميعيـة له. بمـا أن الخصائص أ، ب، د، و يمكن استنتـاجهـا من التعريف ٤ ـ ٢ مباشرة نترك اثباتها للقارىء ونـبرهن الخاصيتـين جـ، هـ فقط، ولاثبات جـ نفرض أن :

$\alpha = \beta + \gamma i$ وبالتعويض وباستخدام التعريف ٤ ـ ٢ نستنتج أن:

$$\int_a^b \alpha f(t)\, dt = \int_a^b \Big(\big(\beta u(t) - \gamma v(t)\big) + i\big(\beta v(t) + \gamma u(t)\big)\Big)\, dt$$

$$= \int_a^b \big(\beta u(t) - \gamma v(t)\big)\, dt + i \int_a^b \big(\beta v(t) + \gamma u(t)\big)\, dt$$

وبتطبيق الخاصية الخطية للتكامل الحقيقي واعادة التجميع فإن:

$$\int_a^b \alpha f(t)\, dt = (\beta + \gamma i) \int_a^b u(t)\, dt + i\,(\beta + \gamma i) \int_a^b v(t)\, dt$$

$$= \alpha \left\{\int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt\right\}$$

$$= \alpha \int_a^b f(t)\, dt.$$

ولاثبات الفرع هـ نستفيد من الشكل القطبي للعدد المركب فنكتب $\int_a^b f(t)\, dt$ كما يلي:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left|\int_a^b f(t)\, dt\right| e^{\theta_0 i}.$$

ومن ذلك فإن:

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt)\right| = \int_a^b e^{-\theta_0 i} f(t)\, dt$$

وبما أن الطرف الأيسر عدد حقيقي فإن التكامل في الطرف الأيمن يجب أن يكون حقيقياً كذلك وبالاستفادة من الخاصية د من النظرية السابقة نستنتج أن:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b \mathrm{Re.}\big(e^{-\theta_0 i} f(t)\big)\, dt$$

ومن خصائص الأعداد المركبة أن:

$$\mathrm{Re.}\, e^{-\theta_0 i} f(t) \leqslant \left| e^{-\theta_0 i} f(t) \right| \leqslant \left| f(t) \right|, \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

وبالاستفادة من خاصية المقارنة للتكامل الحقيقي فإن:

$$\int_a^b \mathrm{Re.}\big(e^{-\theta_0 i} f(t)\big)\, dt \leqslant \int_a^b \left| f(t) \right| dt$$

أي أن :

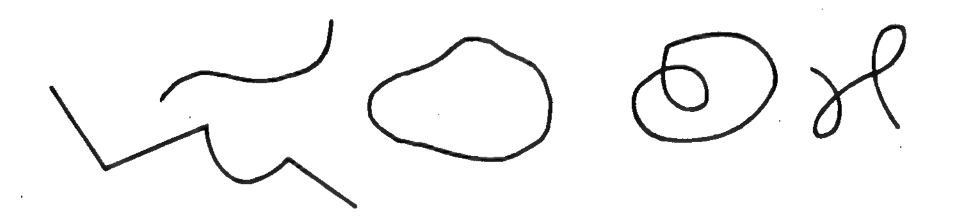
$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

وهذا ينهي اثبات النظرية.

ولمعرفة نوع آخر من التكامل المركب نذكر القارىء بالمنحنيات المستوية (Plane curves) والمنحني المستوي الذي يرمز له بالرمز C معرف بالمساواة التالية :

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$$

بحيث إن الدالتين $x(t), y(t)$ متصلتان على الفترة $[a, b]$ ويسمى المنحني C بسيطاً إذا لم يقطع نفسه أي إذا تحقق الشرط $z(t_1) \neq z(t_2)$ لكل $t_1 \neq t_2$ ، ويسمى المنحني C كذلك مغلقاً إذا تحقق الشرط $z(a) = z(b)$ حيث a تمثل نقطة البداية و b تمثل نقطة النهاية للمنحني نفسه باتجاه تزايد المتغير الوسيط t.



شكل (١) أنواع المسارات

كما يسمى المنحني C ممهداً إذا كان قابلاً للاشتقاق أي إذا وجدت المشتقتان $x'(t), y'(t)$ عند كل t في $[a, b]$ ، ويسمى المنحني C ممهد الاجزاء إذا تكون من عدد منتهٍ من المنحنيات الممهدة موصولة بعضها ببعض نهاية السابق مع بداية اللاحق وهذا النوع من المنحنيات (والتي هي ممهدة الأجزاء) تسمى المسار أو كانتور. والكانتور له اتجاه اعتماداً على زيادة المتغير الوسيط t وقد

اصطلح على أن يكـون اتجاه المسـار موجبـاً باتجـاه زيادة المتغـير t وسالبـاً باتجـاه تناقص t.

وباستخدام فكرة المسار أو الكانتور يمكن أن نعرف نوعاً آخر من التكـاملات المركبة فيما يلي:

تعريف ٢:

بفـرض أن $f(z)$ دالة مـركبة وأن C مسـار يصل بـين العـددين المـركبـين α, β فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z)\,dz \quad .... \quad (٤ - ١٠)$$

يسمى تكـامل المسـار (أو تكامـل الكانتـور) (Line Integral) للدالة f عـلى المسار C ويسمى الكانتور C مسار التكامل.

إذا فرض أن الدالة f هي الدالة الثابتة بقيمة 1 فإن:

$$\int_\alpha^\beta dz = \int_C dz = \int_a^b \left(x'(t) + iy'(t)\right) dt \quad .... \quad (٤ - ١١)$$

يؤول إلى التكامل ٤ ـ ٢. وفي الواقع فإن طول الكانتور C الذي يرمز له بالرمز L يمكن ايجاده بالمعادلة التالية:

$$L = \int_a^b |dz| = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt \quad .... \quad (٤ - ١٢)$$

هذا بافتراض أن المسار C ممهد على الفترة [a, b].

كـما أنه يمكن ايجـاد قيمة (٤ ـ ١٠) بتحـويله إلى التكـامـل (٤ ـ ٢) وذلـك بمعرفة المعادلات الوسيطية لمسار التكامـل وهي $x(t), y(t)$ لينتج من ذلـك ما يلي:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left(x(t) + iy(t)\right) z'(t)\,dt \quad .... \quad (٤ - ١٣)$$

وبما أن المسار C ممهد الأجزاء فإن $z'(t)$ متصلة اتصالاً مجزءاً وبالتالي فإن التكامل على الطرف الأيمن موجود ويمكن أن يأخذ الشكل التالي:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int_a^b (uy' + vx')\,dt \quad \ldots\ldots (٤ - ١٤)$$

حيث إن كلاً من x', y', u, v في الطرف الأيمن تفهم على أنها:

$$u = u\big(x(t), y(t)\big),\ v = v\big(x(t), y(t)\big)$$

$$x' = x'(t),\ y' = y'(t),$$

وهذا التكامل (٤ - ١٤) هو نفس التكامل (٤ - ٢). وبالتعريف يمكن أن نفهم:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz \quad \ldots\ldots (٤ - ١٥)$$

حيث إن $-C$ يمثل الاتجاه السالب للكانتور C. إن قابلية التكامل لدالة ما تؤكده النظرية التالية التي نذكرها بدون برهان.

نظرية ٢:

إذا كانت الدالة f متصلة على المجال D الذي يحتوي المسار الممهد C فإنها تكون قابلة للتكامل على C أي أن:

$\int_C f(z)\,dz$ عدد مركب.

أما النظرية التالية فتذكر أهم خصائص تكامل المسار.

نظرية ٣:

بفرض أن g و f دالتان مركبتان وان C_1, C_2, C مسارات فإن:

أ - $\int_C (f+g)(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz \quad \ldots\ldots (٤ - ١٦)$

ب ـ لأي عدد مركب α فإن:

$$\int_C \alpha f(z)\, dz = \alpha \cdot \int_C f(z)\, dz \quad \ldots\ldots (٤ ـ ١٧)$$

جـ ـ إذا كان المسار C_1 موصولاً بالمسار C_2 نهاية الأول ببداية الثاني ويرمز لهما بالرمز C فإن:

$$\int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, fz = \int_C f(z)\, dz \quad \ldots\ldots (٤ ـ ١٨)$$

د ـ إذا كان M عدداً حقيقياً موجباً بحيث $|f(z)| \leqslant M$ لكل z في مجال f فإن:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant M.\, L \quad \ldots\ldots (٤ ـ ١٩)$$

حيث يمثل L طول المسار C.

البرهـــان:

بما أن التكامـل $\int_C f(z)\, dz$ يمكن اختصاره إلى الشكـل (٤ ـ ٢)، نبرهن فقط الفرع (د). ولذلك فإن الخاصية (هـ) من النظرية ١ تؤكد أن:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant \int_a^b |f(z)|\, |dz| \quad \ldots\ldots (٤ ـ ٢٠)$$

$$\leqslant M \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

هذا بفرض أن C قابل للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ وإذا كان ممهد الأجزاء فإننا بحاجة إلى تقسيم التكامل حسب الفترات التي يكون عليها C ممهداً،

وبما أن $L = \int_a^b |z'(t)|\, dt$ هو طول الكانتور فإن:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant M.\, L.$$

مثـــال ٢:

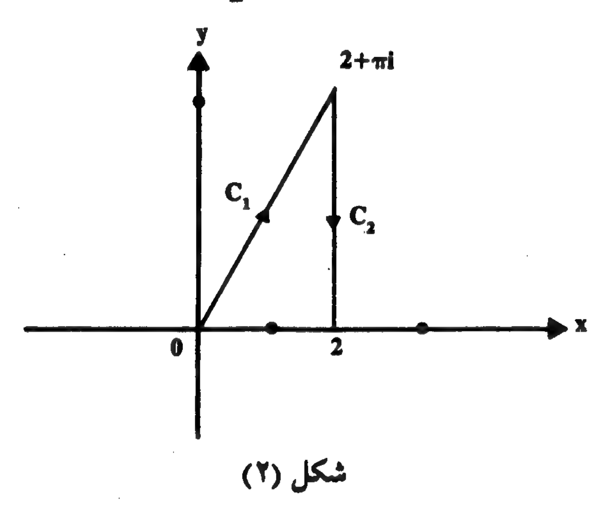
جد قيمة التكامل $\int_C f(z)\, dz$ حيث إن $f(z) = e^{zi}$ ومسار التكامـل C

هـو الكـانتـور المكـون من الخـطين المستقيمـين اللذين يصـلان بـين النقـاط $0, 2+\pi i, 2$ على الترتيب.

الحـل:

نبحث عن المعادلات الوسيـطية لكـل من هذين الخـطين المستقيمين فيكـون المستقيم الأول C_1 معرف بما يلي:

$$C_1 : y = \frac{\pi}{2}\, x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$



شكل (٢)

أما المستقيم الثاني C_2 فهو معرف بما يلي: $C_2 : x = 2, \quad \pi \geqslant y \geqslant 0$

ومن ذلك يمكن كتابة التكامل كمجموع تكاملين:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$$

ولايجاد التكامل الأول على المسار C_1 فإن المعادلات الوسيـطية لهـذا المسار تبـين أن:

$$dz = dx + i\, dy = dx + i\left(\frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{2}\, i\right) dx$$

ومن ذلك فإن:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^2 e^{i\left(x + \frac{\pi}{2} x i\right)} \left(1 + \frac{\pi}{2} i\right) dx$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{2} i\right) \int_0^2 e^{\left(-\frac{\pi}{2} + i\right)x}\, dx$$

وبما أن الدالة:

$$\frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + i\right)} e^{\left(-\frac{\pi}{2} + i\right)x}$$

هي أصل المشتقة للدالة

$$e^{\left(-\frac{\pi}{2} + i\right)x}$$

فإن:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \frac{1 + \frac{\pi}{2} i}{-\frac{\pi}{2} + i} e^{\left(-\frac{\pi}{2} + i\right)x} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1 + \frac{\pi}{2} i}{-\frac{\pi}{2} + i} \left\{e^{(-\pi + 2i)} - 1\right\}$$

$$= i\left(1 - e^{-\pi} e^{2i}\right)$$

وكذلك فإن المعادلات الوسيطية للمسار الثاني C_2 تبين أن:

$$dz = dx + i\,dy = (dy)i$$

لأن x مقدار ثابت.

وبالتالي فإن:

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_\pi^0 e^{i(2 + yi)}\, i\,dy$$

$$= i\, e^{2i} \int_\pi^0 e^{-y}\, dy$$

$$= i\, e^{2i}\left(e^{-\pi} - 1\right).$$

لاحظ أن اتجاه المسار فرض أن تكون حدود التكامل من π إلى 0 وليس العكس. ومن ذلك نستنتج قيمة تكامل المسار على C وهي:

$$\int_C f(z)\,dz = i\left(1 - e^{-\pi} e^{2i}\right) + i\left(e^{2i} e^{-\pi} - e^{2i}\right)$$

$$= i\left(1 - e^{2i}\right).$$

مثـــال ٣:

جـد قيمة التكـامل $\int_C f(z)\,dz$ حيث إن $f(z) = z$ وإن المسـار C هـو دائرة الوحدة.

الحـــل:

بما أن المسار C هو دائرة الوحدة فإن معادلتيه الوسيطيتين هما:

$$C : x = \cos t$$
$$y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

وبالتالي فإن:

$$dz = dx + i\,dy$$
$$= (-\sin t + i \cos t)\,dt$$

أما قيمة التكامل فهي:

$$\int_C z\,dz = \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t + i \cos t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -2 \cos t \sin t + i(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sin 2t\,dt + i \int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}\, i \sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

مثـــال ٤:

جد قيمة التكامل $\int_C f(z)\,dz$ حيث إن $f(z) = \bar{z}$ والمسـار C هو دائـرة الوحدة.

الحـــل:

بالاستفادة من المعادلات الوسيطية لدائرة الوحدة نستنتج أن:

$$dz = (-\sin t + i \cos t)\,dt$$

وبالتالي فإن:

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi i$$

لاحظ الفرق بين المثال ٣ والمثال ٤ حيث إن قيمة تكامل المسار للدالة التحليلية z على المسار دائرة الوحدة صفراً بينما قيمة تكامل المسار للدالة $\bar{z}$ التي ليست تحليلية على أي نقطة في المستوي المركب على نفس المسار هي $2\pi i$ وليست صفراً.

مثال ٥:

بيّن أن:

$$\left| \int_C \frac{e^{zi}}{z^2 - i}\, dz \right| \leqslant \frac{12}{5}\pi e^2$$

حيث إن C هو $|z| = \frac{3}{2}$.

الحل:

بما أن المسار C هو الدائرة التي نصف قطرها 3/2 فإن طول هذا المسار $L = 3\pi$ بقي أن نجد عدداً حقيقياً موجباً M بحيث إن $|f(z)| \leqslant M$ لكل z في مجالها. بالاستفادة من المتباينة المثلثية التالية نجد أن:

$$|z^2 - i| \geqslant |z|^2 - |i| = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{|z^2 - i|} \leqslant \frac{4}{5}$$

أما الدالة الأسية فهي:

$$|e^{zi}| = e^{-y} \leqslant e^2$$

وهذا يبين قيمة M فتكون:

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{5} e^2 = M$$

وعليه فإن:

$$\left| \int_C \frac{e^{zi}}{z^2 - i}\, dz \right| \leqslant \frac{4}{5} e^2 (3\pi) = \frac{12}{5}\pi e^2$$

تمارين ٤ ـ ١

١ ـ بين أن المسار C حيث: $C : z(t) = t^3 - it, \quad 0 \leq t \leq 2$
مسار ممهد

٢ ـ جد معادلتين وسيطيتين تمثلان المسار C المعرف بالمعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ثم بين أن C ممهد.

٣ ـ جد معادلتين وسيطيتين لكل مسار C فيما يلي:

أ ـ نصف الدائرة العلوي $|z - i| = 2$ الذي يسير عكس عقارب الساعة.

ب ـ C مكون من القطع المستقيمة التي تصل بين النقاط $-2, 2i, 2+2i, 5$ على الترتيب.

جـ ـ الجزء من القطع المكافىء $y = x^2$ الذي يصل بين النقطتين $(2, 4), (0, 0)$.

٤ ـ بيّن أن مدى الدالة $0 \leq t \leq \pi, z(t) = \cos t + t^2 i$ يمثل مساراً ممهداً.

٥ ـ باستخدام المساواة ٤ ـ ١٢ جد طول المسار C فيما يلي:

أ ـ المسار المذكور في فرع أ من التمرين ٣.
ب ـ المسار المذكور في فرع ب من التمرين ٣.
جـ ـ المسار المذكور في فرع جـ من التمرين ٣.
د ـ المسار المذكور في التمرين ٢.
هـ ـ المسار المذكور في التمرين ١.

٦ ـ اعط تفسيراً فيزيائياً لكل مما يلي:

أ ـ $z'(t)$

ب ـ $|z'(t)|$

جـ ـ $\int_a^b |z'(t)|\, dt$.

حيث إن $z(t)$ يمثل مسار نقطة تتحرك في المستوي ومجال المتغير t هو $[a, b]$.

٧ ـ جد قيمة التكاملات التالية:

أ ـ $\int_0^1 (t^2 - t^3 i)\, dt$

ب ـ $\int_0^{\pi/2} e^{-ti}\, dt$

جـ ـ $\int_1^3 (i + 2t)^2\, dt$

د ـ $\int_0^{\pi/6} e^{(1-i)t}\, dt$

٨ ـ بفرض أن الدالة θ التي تنقل الفترة $[c, d]$ على الفترة $[a, b]$ بشكل واحد لواحد وشامل متصلة وإذا كان $z(t)$ حيث $t \in [a, b]$ يمثل مساراً ممهداً فبرهن أن:

$$\int_{\theta(c)}^{\theta(d)} |z'(t)|\, dt = \int_c^d |z'(\theta(s))\theta'(s)|\, ds$$

ثم ما هو المعنى الفيزيائي لهذه المساواة.

٩ ـ بين أن:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} \cdot e^{-int}\, dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ 2\pi & , m = n. \end{cases}$$

١٠ ـ جد قيمة التكامل $\int_C \bar{z}\, dz$ لكل من المسارات التالية:

أ ـ C مجموعة النقاط التي تحقق:

$z = 2e^{\theta i}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi / 2$

ب ـ C تتكون من الخطوط المستقيمة التي تصل بين النقاط التالية:

$2, 2+i, -2+i, -2$

جـ ـ C تتكون من الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين $-2, 2$.

١١ ـ جد قيمة التكامل $\int_C (z^2+i)\,dz$ لكل من المسارات التالية:

أ ـ $C: z(t) = t + (1+t)i, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

ب ـ الخطوط المستقيمة التي تصل بين النقاط $0, 2, 2-3i$

١٢ ـ جد قيمة التكامل $\int_C |z|^2\,dz$ للمسار

$$C: z(t) = -t + (1-t)i, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

١٣ ـ جد قيمة التكامل $\int_C e^{-zi}\,dz$ للمسار

$$C: z(t) = 2 + e^{ti}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

١٤ ـ بفرض أن C يمثل الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 وأن الدالة f متصلة على C بين أن:

$$\int_C f(z)\,dz = r_0 i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{ti})\, e^{ti}\,dt$$

اقتراح: بين أن المعادلة التي تمثل C هي:

$$C: z(t) = z_0 + r_0 e^{ti}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

١٥ ـ بالاستعانة بالتمرين السابق بين أن:

أ ـ $$\int_C \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$$

ب ـ $$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = 0, n \neq 1$$

حيث إن C هو الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_0.

١٦ - برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{z^{1/2}}{z^2+1}\, dz \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

حيث إن C تمثل نصف محيط الدائرة

$C : z(t) = 3\, e^{ti}, 0 \leq t \leq \pi.$

١٧ - برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2-1}\, dz \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

حيث إن C يمثل ربع الدائرة

$C : z(t) = 2\, e^{ti}, 0 \leq t \leq \pi / 2$

١٨ - برهن أن:

$$\left| \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz \right| \leq 2\pi \; \frac{\pi + \ln R}{R}$$

حيث إن C يمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها R أكبر من 1.

١٩ - بفرض أن C يمثل دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل برهن أن:

أ - $\int_C e^z\, dz = 0$

ب - $\int_C e^{\bar{z}}\, dz \neq 0$

٢٠ - كرر التمرين السابق للدالة $f(z) = z^2$ للفرع (أ) و $f(z) = \bar{z}^2$ للفرع (ب). ماذا تستنتج من كلا التمرينين.

٢١ - بفرض أن C يمثل الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين $0, \pi / 2$ برهن أن:

$$\left| \int_C e^{\cos z}\, dz \right| \leq e.$$

٤ ـ ٢ نظرية ٣ (كوشي ـ كورسات) والاستقلالية عن المسار:
(Cauchy - Goarsat)

بالعودة إلى التكامل ٤ ـ ١٠ وهو تكامل المسار:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z)\, dz$$

والذي يمكن اعادة صياغته بشكل آخر بالاستفادة من تمثيل الدالة $f(z)$ على الصيغة $f = u + vi$ وذلك على النحو التالي:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u + vi)\,(dx + i\, dy)$$

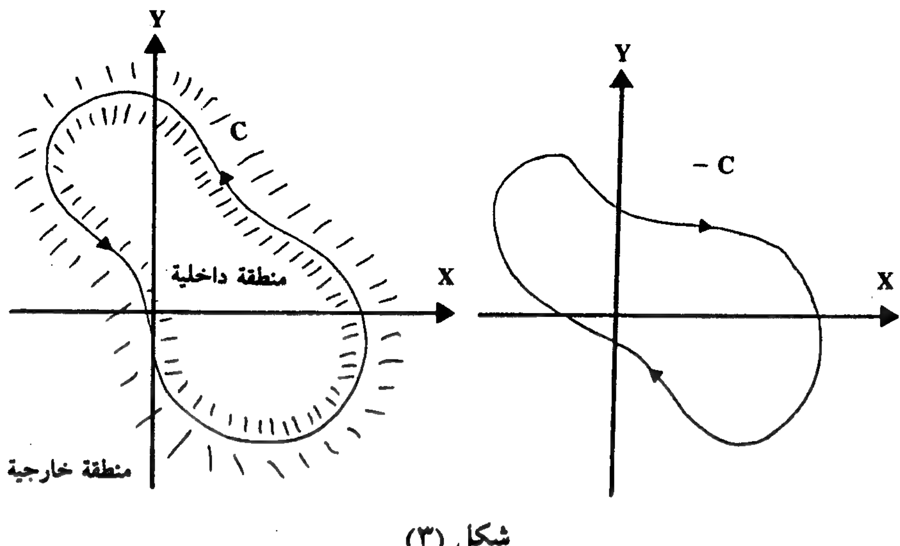
$$= \int_C (u\, dx - v\, dy) + i\,(u\, dy + v\, dx)$$

وبالتالي فإن:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u\, dx - v\, dy) + i \int_C (u\, dy + v\, dx) \quad \ldots\ldots \quad (٤ ـ ٢١)$$

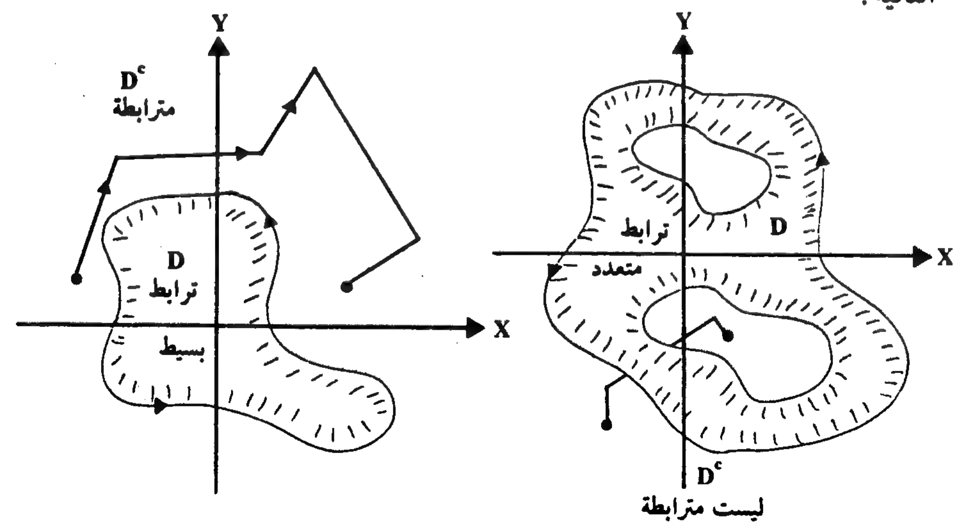
ومن ذلك نستنتج أن تكامل المسار للدالة المركبة يمكن فهمه على أنه يتكون من الجزء الحقيقي $\int_C u\, dx - v\, dy$ والجزء التخيلي $\int_C u\, dy + v\, dx$ وكل منهما يمثل تكامل المسار المعروف في التحليل المتجه في التفاضل والتكامل والذي يمكن إيجاد قيمته بتطبيق نظرية غرين والتي نذكرها للفائدة دون برهان بعد التعرف على نوع مهم من مسارات التكامل. بفرض أن C كانتور مغلق وبسيط فإن C يقسم المستوي الى قسمين، قسم محدود بالمسار C ويسمى المنطقة الداخلية للمسار، وقسم غير محدود بالمسار ويسمى المنطقة الخارجية للمسار.

وبما أن المسار ذو اتجاه فإنه اصطلح على اعتبار الاتجاه الموجب للمسار هو الاتجاه الذي يحدد بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة بحيث تكون المنطقة الداخلية للمسار دائماً على يسار النقطة المتحركة على المسار نفسه كما يوضح الشكل التالي:



شكل (٣)

والمنطقة الداخلية لمسار موجب الاتجاه C قد تكون مترابطة وقد تكون غير ذلك وهناك نوعان من الترابط. الأول الترابط البسيط، فالمجال D يسمى مترابطاً ترابطاً بسيطاً إذا كانت مكملة D (أي $D^c = \mathbb{C} - D$) مترابطة. والنوع الثاني الترابط المتعدد (أو غير البسيط)، فالمجال D يسمى مترابطاً متعدداً إذا كانت مكملة D (وهي D^c) ليست مترابطة. هذه المفاهيم موضحة بالأشكال التالية:



شكل (٤)

ويمكن أن يفهم المجال المترابط تـرابطاً متعـدداً (ليس بسيطاً) كصفيحـة فيها خرق واحد أو أكثر.

نظرية ٤ غرين: (Green):

بفـرض أن المسار C كـانتور بسيط ومغلق مـوجب الاتجاه و D تمثـل المنطقـة الـداخلية لهـذا المسار، إذا كـانت الدالتـان $v (x, y)$ و $u (x, y)$ متصلتين وكذلك المشتقات الجزئيـة u_x, u_x, v_x, v_y موجـودة ومتصلة على جميـع نقاط C و D فإن:

$$\int_C (u\,dx + v\,dy) = \iint_D (v_x - u_y)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots (٤ - ٢٢)$$

إن هذه النظرية تمكننا من تحويل تكـامل المسـار (٤ - ١٠) الى تكامـل ثنائي يمكن ايجاد قيمته بالطرق المعروفة في التفاضل والتكامل كما يلي:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (u\,dy + v\,dx) \quad \ldots\ldots (٤ - ٢٣)$$

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_D (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i \iint_D (u_x - v_y)\,dx\,dy$$

لقد استطاع كوشي الاستفادة من نظرية غرين بإعطاء برهان للنظريـة التاليـة والتي تلعب دوراً هاماً في التكامل المركب.

نظرية ٥ (كوشي - كورسات):

بفرض أن المجال D مترابط ترابـطاً بسيطاً والـدالة f تحليليـة على المجـال D فإذا كان المسار C كانتوراً مغلقاً وبسيطاً يحتويه المجال D فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \quad \ldots\ldots (٤ - ٢٤)$$

البرهـــان:

بما أن الدالة f تحليلية فإن الدالتـين u, v تحققان معـادلتي كوشي - ريمـان أي أن:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

وبالإستفادة من المساواة (٤ ـ ٢٣) نحصل على النتيجة المطلوبة.

وهناك برهان آخر قدمه كورسات ويعتمد على التحليل الرياضي (وعلى الفرضية أن المشتقة $f'_{(z)}$ متصلة) ونترك هذا البرهان لمساقات متقدمة في التحليل المركب.

مثـــال ٦:

بين أن: $\int_C e^{zi}\, dz = 0$

حيث إن المسار C يمثل دائرة الوحدة.

الحـــل:

بما أن المسار C يمثل كانتوراً مغلقاً وبسيطاً والدالة $f(z) = e^{zi}$ تحليلية على مجال يحتوي المسار C فإن نظرية كوشي ـ كورسات تؤكد أن:

$$\int_C e^{zi}\, dz = 0$$

النظرية التالية من نتائج نظرية ـ كوشي ـ كورسات.

نتيجة ٦:

نفرض أن C_1, C_2 مساران مغلقان بسيطان موجبا الاتجاه أحدهما موجود في المنطقة الداخلية للآخر وأن الدالة $f(z)$ تحليلية على مجال يحتوي كلاً من C_1, C_2 والمنطقة المحصورة بينهما (وليست بالضرورة على المنطقة الداخلية للمسار الداخلي) فإن:

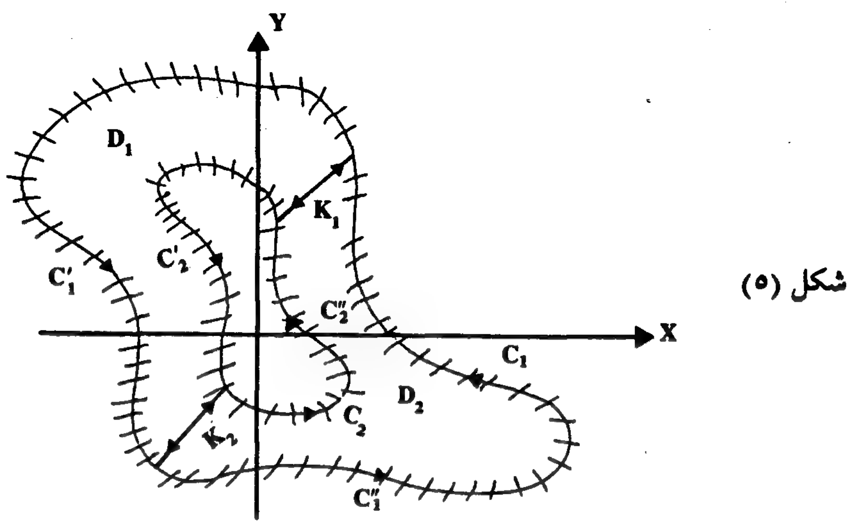
$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$$

البرهـــان:

نقسم المجال إلى قسمين D_1, D_2

الأول D_1 محاط بالمسار L_1 حيث إن: $L_1 = C'_1 - K_2 - C'_2 + K_1$

والثاني D_2 محاط بالمسار L_2 حيث أن: $L_2 = C_1'' - K_1 - C_2'' + K_2$



شكل (٥)

وواضح أن الدالة f تحليلية على المجالين D_1, D_2 والمسارين اللذين يحيطان بهما L_1, L_2. لذلك يمكننا تطبيق نظرية كوشي ـ كورسات على كل من المجالين لنستنتج أن:

$$\int_{L_1} f(z)\, dz = 0, \int_{L_2} f(z)\, dz = 0$$

وبمحاولة جمع المسارين L_1, L_2 نجد أن: $L_1 + L_2 = C_1 - C_2$

وبالتالي فإن: $\int_{C_1 - C_2} f(z)\, dz = \int_{L_1} f(z)\, dz + \int_{L_2} f(z)\, dz = 0$

أي أن: $\int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$

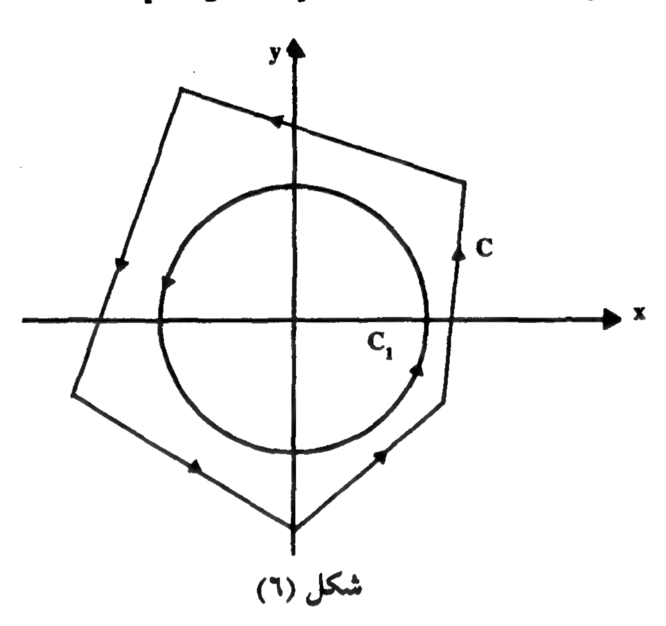
وهذا يعطي النتيجة المطلوبة منهياً برهان النتيجة.

النظرية السابقة تفيدنا بأن قيمة تكامل المسار $\int_C f(z)\, dz$ ثابتة ولا تعتمد على شكل المسار C ما دام هذا المسار مغلقاً وبسيطاً والدالة تحليلية على مجال يحتويه وهذا يمكننا من التخلص من المسار المعقد أو الذي لا نستطيع تمثيله بمعادلات وسيطية والاستبدال به مساراً مغلقاً بسيطاً يمكننا تمثيله بمعادلات وسيطية كما يبين المثال التالي:

مثـال ٧:

جد قيمة التكامل التالي: $\int_C \frac{1}{z} \, dz$

حيث إن C يمثل الكانتور المغلق البسيط في الشكل التالي:



شكل (٦)

الحـل:

لتسهيل عملية الحل نستبدل دائرة الوحـدة بالمسـار C وحيث إن الـدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية على المجـال يحتوي المسـارين وكذلـك على المنـطقة المحصـورة بينهما فـإن النتيجة السابقة قابلة للتطبيق لنستنتج أن:

$$\int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} \, dz$$

وحيث إن C_1 يمثل دائرة الوحدة فإن النقاط z على C_1 تحقق:

$$z(t) = e^{ti}, \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

وبالتالي فإن:

$$\int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} i \, e^{-ti} \, e^{ti} \, dt$$

$$= 2 \pi i$$

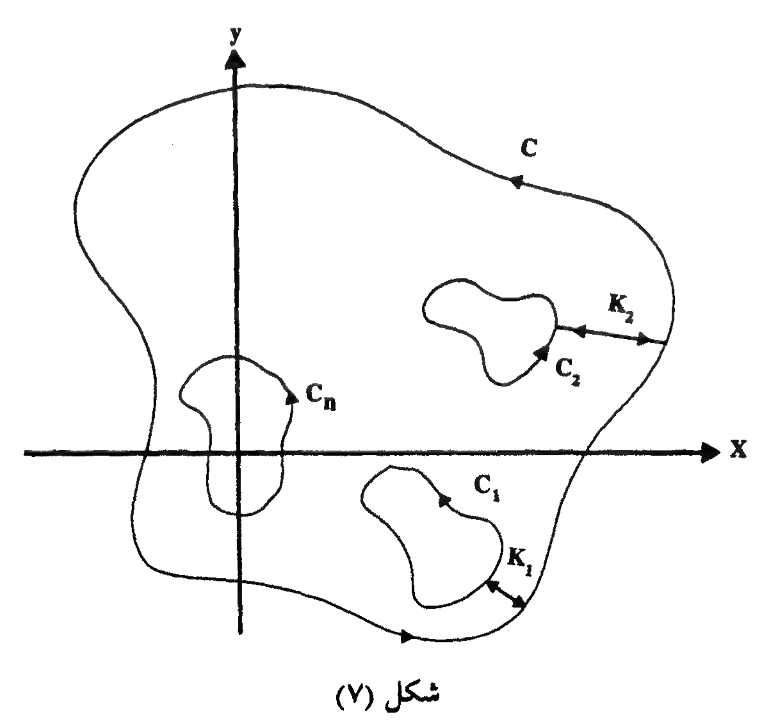
كما أن برهان هذه النتيجة يمكن تطويره لايجاد صيغة أعم لنظرية كوشي - كورسات التالية.

نظرية ٧: (تعميم لنظرية كوشي - كورسات):

نفرض أن C كانتور مغلق وبسيط موجب الاتجاه وأن $C_1, C_2, \ldots C_n$ تمثل مسارات مغلقة وبسيطة وموجبة الاتجاه ومنفصلة مثنى مثنى تقع في المنطقة الداخلية للمسار C وبفرض أن الدالة f تحليلية على مجال يحتوي على كل من المسارات $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ وعلى المنطقة التي تقع خارج المسارات $C_1, C_2,$ $\ldots$ C_n وداخل المسار C (وليس بالضرورة داخل المسارات $C_1, C_2, \ldots, C_n$) فإن:

$$\int_B f(z)\,dz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٢٥)$$

حيث يمثل B المسار المكون من $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ الموضح في الشكل التالي:



شكل (٧)

أي أن B هو:

$$B = C + K_1 - C_1 - K_1 + K_2 - C_2 - K_2 + \ldots + K_n - C_n - K_n$$

$$= C - \{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n\}$$

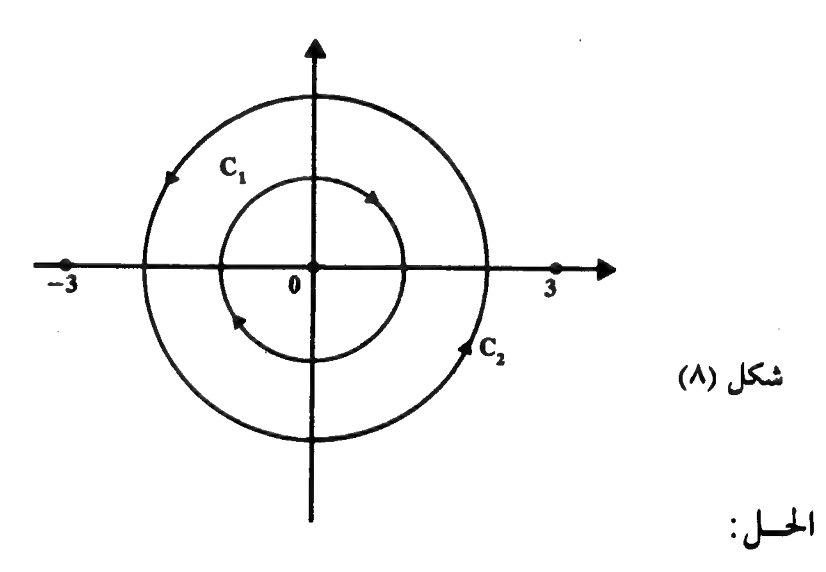
لفهم البرهان لاحظ أن الدالة f تحليلية على المجال الذي يمثل المنطقة الداخلية للمسار B الموجب الاتجاه. المثال التالي يبين تطبيق النظرية ٧:

مثـال ٨:

جد قيمة التكامل

$$\int_B \frac{z^3 - i}{z(z^2 - 9)} dz$$

حيث يمثل المسار B مجموع المسارين C_1, C_2 حيث C_1 يمثـل المسار $z(t) = e^{ti}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ السـالب الاتجاه ويمثـل C_2 المسـار $z(t) = 2e^{ti}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ الموجب الاتجاه.



شكل (٨)

الحـل:

بتطبيق النظرية ٧ نستنتج أن قيمة التكامل صفراً لأن الدالة تحليلية على كـل الأعـداد المركبـة بـاستثنـاء 3 ,0 ,3− وهـذه لا تقـع في المجـال بـين C_1, C_2 ولا عليهما.

لاحظنا من النتيجة ٦ أن كون الدالة تحليلية على مجال D يحتوي مسار التكامل المغلق والبسيط C يكسب تكامل المسار صفة هامة وهي أن التكامل ثابت القيمة لجميع المسارات في ذلك المجال المشابهة للمسار C، والحقيقة أن كون الدالة تحليلية يكسب التكامل عمقاً أكثر من ذلك حيث يجعل التكامل مستقلاً عن المسار وهذا يمكننا من تعريف التكامل المحدود وغير المحدود وخاصة النظرية الأساسية للتكامل لذلك نبدأ بالتعريف التالي:

تعريف ٣:

إذا كانت قيمة التكامل $\int_C f(z)\,dz$ ثابتة لجميع المسارات C التي تصل بين نقطتين β و α فإن التكامل:

$$\int_C f(z)\,dz$$

يسمى مستقلاً عن المسار ويكتب بالصيغة:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z)\,dz \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٢٦)$$

النظرية التالية تسمى النظرية الأساسية للتكامل:

نظرية ٨:

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال المترابط ترابطاً بسيطاً D وأن α نقطة ثابتة في D. إذا كانت z نقطة اختيارية في D والمسار C كانتوراً يصل بين النقطتين α, z ومحتوى كلياً في D فإن الدالة:

$$F(z) = \int_C f(\omega)\,d\omega = \int_\alpha^z f(\omega)\,d\omega \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٢٧)$$

تحليلية على المجال D وتحقق المساواة

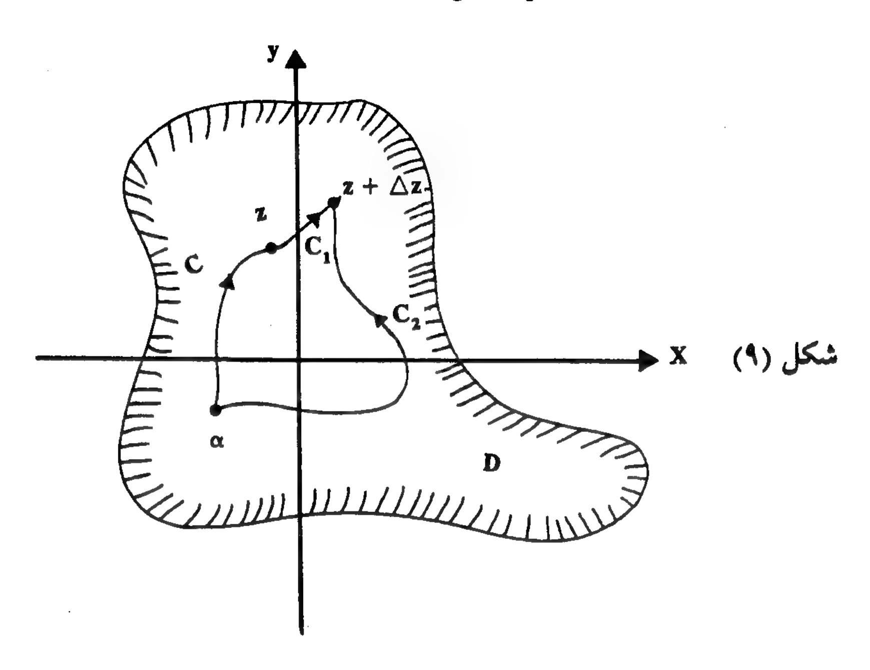
$$F'(z) = f(z) \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٢٨)$$

البرهـان:

نفـرض أن C_1 يمثل القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين z

و $z + \Delta z$ وأن C_2 أي كانتور يصل بين النقطتين $z + \Delta z, \alpha$ فإذا عرفنا المسار B الموجب الاتجاه الظاهر في الشكل كما يلي:

$$B = C_2 - C_1 - C$$



شكل (٩)

فإن B كانتور مغلق وبسيط، وبما أن الدالة تحليلية على مجال يحتوي هـذا المسار فإن النظرية ٥ والنتيجة ٦ تؤكدان أن التكامل:

$$\int_B f(\omega)\, d\omega$$

لا يعتمد على المسار وأن

$$\int_B f(\omega)\, d\omega = 0$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\int_{C_2} f(\omega)\, d\omega - \int_{C_1} f(\omega)\, d\omega - \int_C f(\omega)\, d\omega = 0$$

أي أن:

$$\int_{C_2} f(\omega)\, d\omega - \int_C f(\omega)\, d\omega = \int_{C_1} f(\omega)\, d\omega$$

وهذا يمكن كتابته كما يلي:

$$\int_{\alpha}^{z+\Delta z} f(\omega)\, d\omega - \int_{\alpha}^{z} f(\omega)\, d\omega = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\omega)\, d\omega \quad \ldots\ldots (٤ - ٢٩)$$

وحسب تعريف $F(z)$ (٤ - ٢٧) فإن:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{C_1} f(\omega)\, d\omega \quad \ldots\ldots (٤ - ٣٠)$$

وبملاحظة أن:

$$\int_{C_1} d\omega = \int_{z}^{z+\Delta z} d\omega = \Delta z$$

نستنتج أن:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_{C_1} f(\omega)\, d\omega - \int_{C_1} f(z)\, d\omega \right|$$

ومن ذلك وبتطبيق الفرع هـ من النظرية ١ فإن:

$$\left|\frac{Fz+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|} \int_{C_1} |f(\omega) - f(z)|\, |d\omega|$$

وبما أن الدالة تحليلية فإنها متصلة لذلك فإن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن:

$$|\omega - z| < \delta \Rightarrow |f(\omega) - f(z)| < \epsilon$$

وهذا ينتج أن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إنه إذا تحقق الشرط $|\omega - z| < \delta$ فإن:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \int_{C_1} |d\omega| = \epsilon$$

ومن هذا فإن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z)$$

أي أن $F(z)$ تحليلية على D وتحقق المساواة $F'(z) = f(z)$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

هذه النظرية تمكننا من إيجاد قيمة التكامل لأي دالة f تكون تحليلية وذلك بمعرفة أصل المشتقة للمكامل كما تبين النظرية التالية:

نظرية ٩:

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D وكانت F أي أصل مشتقة لها فإنه لكل α و β في D يكون:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٣١)$$

البرهان:

بتطبيق النظرية ٨ نستنتج أن التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz$ مستقل عن المسار لأن:

$$F(z) = \int_{\alpha}^{z} f(\omega)\,d\omega$$

تحليلية وبالتالي تكون متصلة، فإذا كانت $H(z)$ أي أصل مشتقة آخر فإن $H'(z) = F'(z)$ وبالتالي فإن $F(z) = H(z) + K$ حيث K عدد مركب ثابت، نجده بالتعويض بدلاً من z العدد المركب α لينتج أن:

$$0 = \int_{\alpha}^{\alpha} f(\omega)\,d\omega = F(\alpha) = H(\alpha) + K$$

أي أن $K = -H(\alpha)$ وبالتعويض بدلاً من z العدد المركب β ينتج أن:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\omega)\,d\omega = H(\beta) - H(\alpha)$$

وبما أن:

$$H(\beta) - H(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$$

فإن:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

وهذا ينهي إثبات النظرية

أما التكامل المركب غير المحدود ففي التعريف التالي:

تعريف ٤ :

بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال المترابط ترابطاً بسيطاً D وأن F تمثل أصل المشتقة للدالة f فإن التكامل المركب غير المحدود معرف بالمساواة التالية:

$$\int f(z)\, dz = F(z) + K$$

حيث إن K عدد مركب يسمى ثابت التكامل.

هذه النظريات أبرزت أهمية الدوال التحليلية على مجال معين وفي نفس الوقت سهولة ايجاد التكامل المركب لهذه الدوال لأن هذا التكامل يكون مستقلاً عن المسار، كل ما نحتاجه أن نبحث عن أصل المشتقة للدالة المكاملة، وهنا ننوه أن جميع طرق التكامل التقليدية المعروفة في التفاضل والتكامل قابلة للتطبيق في حالة التكامل المركب للدوال التحليلية، كما تبين الأمثلة التالية:

مثال ٩:

جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}i} \sin z\, dz$

الحل:

بما أن الدالة sin z تحليلية على كل المستوي المركب فإنها تحليلية بشكل أخص على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يحتوي النقطتين $0, \frac{\pi}{2} i$ لذا فإن التكامل مستقل عن المسار وقيمته هي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}i} \sin z\, dz = -\cos z \Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} i\right)$$

مثال ١٠:

جد قيمة التكامل $\int_i^{2-3i} 3z^2\, dz$

الحل:

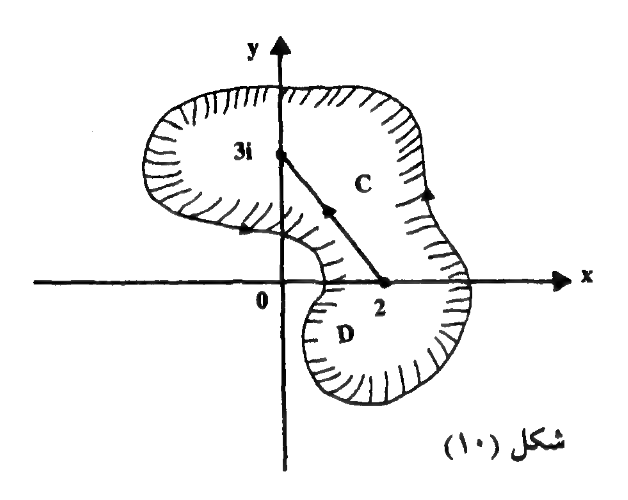
بما أن أصل المشتقة للمكامل هي z^3 فإن:

$$\int_i^{2-3i} 3z^2\, dz = (2-3i)^3 - i^3 = -46 - 8i$$

مثـال ١١:

جد قيمة التكامل $\int_C \frac{1}{z^2}\, dz$

حيث إن C يمثل القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين 2, 3i.



شكل (١٠)

الحـل:

بمـا أن الدالـة ليست تحليلية عـلى النقطة $z = 0$ فقط وهي نقـطة متفـردة ومعـزولة للدالـة فإنـه يمكن إيجاد مجـال D لا يحتوي نقـطة الأصل ويحتـوي على المسار C بين النقطتين $2, 3i$ وتكون عليه الدالة تحليلية وبالتالي فإن التكـامل مستقل عن المسار وقيمته هي:

$$\int_C \frac{1}{z^2}\, dz = \int_2^{3i} z^{-2}\, dz = -\frac{1}{z}\Big|_2^{3i} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, i\right)$$

مثـال ١٢:

جد قيمة التكامل $\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\, dz$

الحـل:

أصـل المشتقـة للدالـة $\frac{1}{z}$ هي Log z حيـث z لا تحقق الشرطين

$Re.\, z \leqslant 0$ و $Im.\, z = 0$ وبما أن النقطتين $-i, i$ تقعان في مجال تكون عليه الدالة تحليلية فإن التكامل مستقل عن المسار، وأن:

$$\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\, dz = \text{Log}\, i - \text{Log}\,(-i)$$
$$= \pi i.$$

مثال ١٣:

بين أن التكامل $\int_C f(z)\, dz$ حيث إن:

$$f(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}, |z| > 0, -\pi < \theta < \pi$$

ليس مستقلاً عن المسار الذي يصل بين النقطتين $-2, 1+\sqrt{3}\, i$ ثم جد قيمة التكامل في الحالات التالية:

أ ـ إذا كان C واقعاً في النصف العلوي من المستوي المركب.

ب ـ إذا كان C واقعاً في النصف السفلي من المستوي المركب.

الحل:

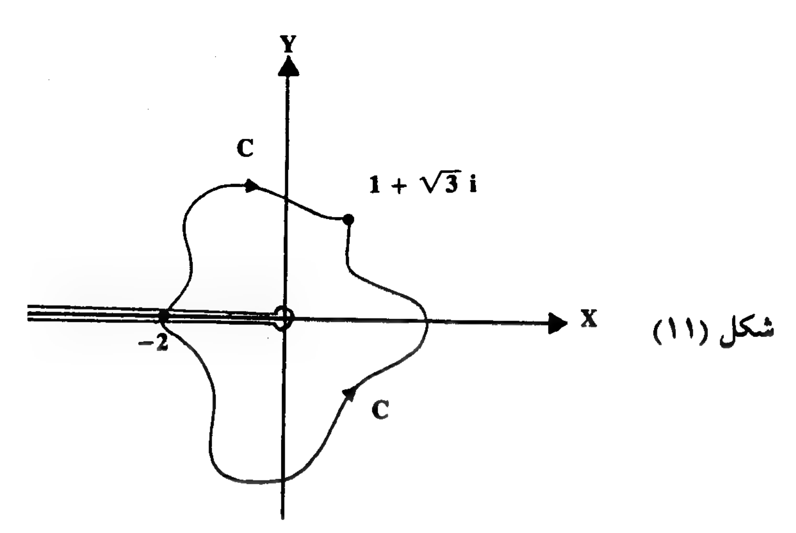
بما أن الدالة $f(z)$ تمثل الفرع الرئيسي للدالة متعددة القيمة $z^{1/2}$ فإنها ليست متصلة على الشعاع $\theta = -\pi$ وبالتالي ليست متصلة عند النقطة $z = -2$ لذلك فإن الدالة ليست تحليلية على مجال يحتوي المسار والنقطتين وهذا يؤكد أن التكامل ليس مستقلاً عن المسار.

ولإيجاد قيمة التكامل في الفرع (أ) نبحث عن فرع للدالة يتوافق مع $f(z)$ ويكون تحليلياً على المسار والنقطتين $-2, 1 + \sqrt{3}\, i$ ومن المعلوم أنه يمكن إيجاد الفرع المطلوب بإعطاء قيمة مناسبة للعدد الحقيقي α للدالة.

$$f(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}, |z| > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

وبإعطاء α القيمة $-\frac{\pi}{2}$ نحصل على الفرع:

$$f(z) = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}, |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < 3\,\frac{\pi}{2}$$



شكل (١١)

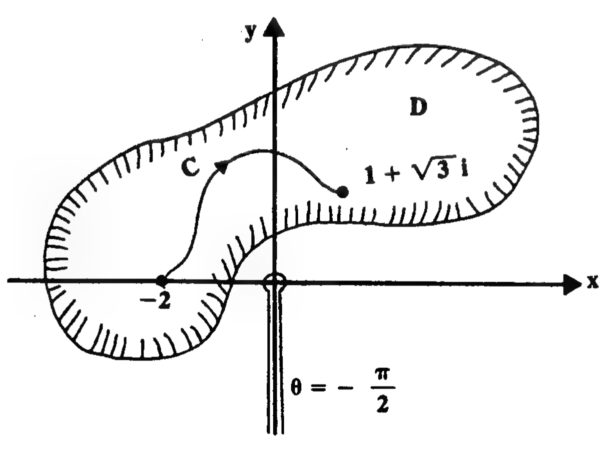
وهذا يتوافق مع الفرع الرئيسي (ما عدا بالطبع $z = -2$) وهذا الفرع تحليلي على جميع الأعداد المركبة التي لا تقع على الشعاع $\theta = -\frac{\pi}{2}$ وبالتالي فإنه تحليلي على مجال يحتوي على المسار C والنقطتين $-2, 1 + \sqrt{3}\, i$ وبإيجاد أصل المشتقة للدالة $f(z)$ نجد قيمة التكامل وهي :

$$\int_{-2}^{1+\sqrt{3}i} f(z)\, dz = \frac{2}{3}\, z^{3/2} \Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3}\, 2^{3/2}\, e^{i3\,\theta/2} \Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3}\, 2^{3/2} \left(e^{\pi\, i/2} - e^{3\,\frac{\pi}{2}\, i}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\, i$$

كما يبين الشكل التالي :



شكل (١٢)

وبإعطاء α القيمة $\frac{\pi}{2}$ نحصل على الفرع:

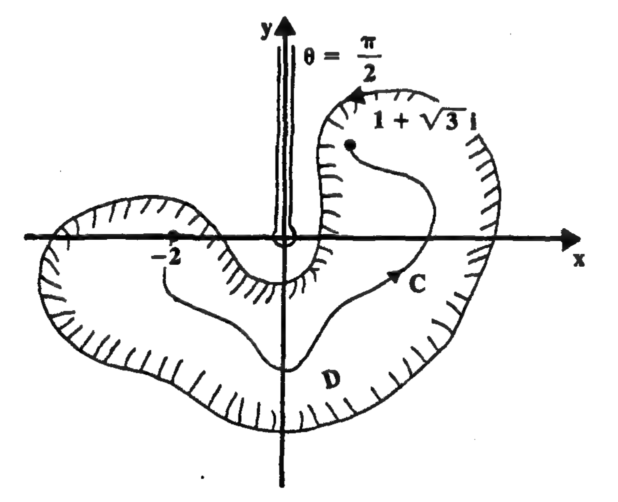
$$f(z) = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}, \; |z| > 0, \; \frac{\pi}{2} < \theta < 5\frac{\pi}{2}.$$

وهذا يتوافق كذلك مع الفرع الرئيسي (باستثناء $z = -2$ بالطبع) ولكنه تحليلي على جميع الأعداد المركبة التي لا تقع على الشعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإذا كان المسار الذي يصل بين النقطتين $-2, 1 + \sqrt{3}\,i$ واقعاً في النصف السفلي للمستوي المركب كما في الشكل فإن هذا الفرع يكون تحليلياً على مجال D يحتوي C والنقطتين -2 و $1 + \sqrt{3}\,i$ وبإيجاد أصل المشتقة لهذا الفرع نجد قيمة التكامل وهي:

$$\int_{-2}^{1+\sqrt{3}i} f(z)\,dz = \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3} |z|^{3/2} e^{i3\theta/2} \Big|_{-2}^{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{3} 2^{3/2} \left(e^{i\frac{3}{2}\left(\frac{7\pi}{3}\right)} - e^{i3\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$



شكل (١٣)

لاحظ اختلاف قيمتي التكامل باختلاف المسار الواصل بين النقطتين. لاحظ كذلك اننا اخترنا قيمتي $\arg(-2)$, $\arg(1 + \sqrt{3}\,i)$ اللتين تحققان المتباينة لكل فرع في كل حالة.

تمارين ٤ ـ ٢

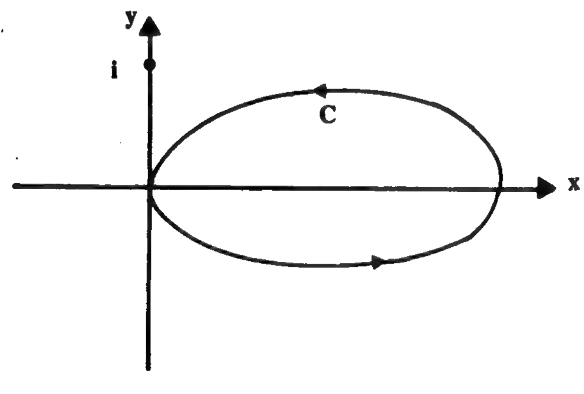
في التمارين ١ ـ ٥ طبق نظرية كوشي ـ كورسات لاثبات أن $\int_C f(z)\, dz = 0$
حيث C كانتور موجب الاتجاه:

١ ـ $C : |z| = 1, \quad f(z) = \sin z$

٢ ـ $C, f(z) = e^{2z}$ مكـون من القـطع المستقيمـة التي تصـل بـين النقـاط $0, 1 + i, 2 + i, 3, 0$ على التوالي.

٣ ـ $C, f(z) = 2z^3 - i$ مكون من أضلاع المثلث ذي الرؤوس $i, -i, 2$.

٤ ـ $C, f(z) = \frac{z}{z-i}$ يمثل الكانتور في الشكل



شكل (١٤)

٥ ـ $C, f(z) = \tan z$ مكـون من القطع المستقيمـة الواصلة بـين النقاط $+ i, -i, +1, -1$ بحيث يكون موجب الاتجاه.

٦ ـ $C, f(z) = |z|^2 e^z$ يمثل دائرة الوحدة.

٧ ـ جد قيمة التكامل $\int_C \frac{1}{z}\, dz$ في الحالات التالية

أ ـ C مكون من المربع الذي رؤوسه $\mp 1, \mp i$ بالاتجاه الموجب

ب - C مكون من الدائرة $|z - 2i| = 1$

جـ - C يصل بين النقطتين z_1, z_2 اللتين لا تقعان على الجزء السالب من المحور الحقيقي.

د - C دائرة الوحدة.

اقتراح: استعن بالفرع (جـ) بفرض أن الدائرة تبدأ بالنقطة z_1 التي تقع في النصف السفلي من المستوى المركب وتنتهي بالنقطة z_2 التي تقع في النصف العلوي من المستيي المركب ثم جد قيمة التكامل بأخذ النهاية عندما تقترب النقطتان z_1, z_2 من النقطة -1 لإغلاق الدائرة.

٨ - في المثال ١٣ برهن أن الفرع الرئيسي للدالة $f(z) = z^{1/2}$ ليست متصلة على النصف السالب من المحور الحقيقي.

٩ - بين أنه لأي كثيرة حدود $P(z)$ فإن $\int_C P(z)\, dz = 0$ لأي مسار مغلق وبسيط C.

١٠ - بين أن $\int_C \frac{1}{z-z_0}\, dz = 0$ لأي مسار مغلق وبسيط C تقع النقطة z_0 في المنطقة الخارجية له.

١١ - بفرض أن

$$\int_C \frac{1}{z+1-i}\, dz = 2\pi i$$

حيث إن C يمثل الدائرة التي مركزها $-1 + i$ ونصف قطرها 2، جد قيمة:

$$\int_C \frac{1}{z+1-i}\, dz$$

إذا كان C يمثل المربع ذا الرؤوس $-2, -2 + 2i, 2i, 0$ بالاتجاه الموجب.

١٢ - جد قيمة التكاملات التالية:

أ - $\int_i^3 (z-i)^2\, dz$ ب - $\int_0^{2+\frac{\pi}{2}i} \sin 2z\, dz$

جـ - $\int_{1}^{2i} e^{\frac{\pi}{2} iz}\, dz$ د - $\int_{\frac{\pi}{3} i}^{1-i} z\, e^{z}\, dz$

هـ - $\int_{0}^{-i} \cos z\, dz$ و - $\int_{1}^{1+i} \frac{2z + 1}{z^{2} + z}\, dz$

١٣ - جد قيمة $\int_{C} \frac{2z + 1}{z^{2} + z}\, dz$ في الحالات التالية

أ - C يمثل الكانتور $|z + 1| = \frac{1}{2}$.

ب - C يمثل الكانتور $|z| = \frac{1}{2}$.

جـ - C يمثل الكانتور $|z - 1| = \frac{1}{2}$.

١٤ - بين أن قيمة $\int_{C} z^{1/2}\, dz$ ليست مستقلة عن المسار إذا كان المسار يصل بين النقطتين $-i, 1 + \sqrt{3}\, i$ وأن

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\,\theta/2},\ |z| > 0,\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{7\pi}{3}$$

ثم جد قيمته باختيار فرع مناسب.

١٥ - بفرض أن $f(z)$ معرفة بالمساواة:

$$f(z) = z^{i} = e^{i\,(\ln|z| + \theta i)},$$

$$|z| > 0,\ -\pi < \theta < \pi$$

وباختيار فرع مناسب، جد قيمة التكامل:

$$\int_{C} f(z)\, dz$$

حيث إن C يصل بين النقطتين $-2, 1+i$، ويقع في النصف العلوي من المستوي المركب.

٤ ـ ٣ نظرية كوشي للتكامل:

لعل من أهم النتائج التي تلعب دوراً هاماً في موضوع التحليل المركب هي نظرية كوشي للتكامل، تلك النظرية التي تبين أن قيمة الدالة التحليلية يمكن أن تمثل بصيغة تكامل على مسار مغلق وبسيط.

نظرية ١٠: (نظرية كوشي للتكامل):

بفرض أن C كانتور مغلق وبسيط وموجب الاتجاه. وأن الدالة f تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً D يحتوي المسار C فإذا كانت ω أي نقطة في المجال D فإن:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \omega}\, dz \quad \ldots\ldots \quad (٤ ـ ٣٢)$$

البرهان:

نفرض أن C_ω تمثل الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها r.

بما أن الدالة $\frac{f(z)}{z-\omega}$ تحليلية على المجال الذي بين المسارين C, C_ω

وعليهما كذلك فإن النتيجة ٦ تؤكد أن:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \omega}\, dz = \int_{C_\omega} \frac{f(z)}{z - \omega}\, dz \quad \ldots\ldots \quad (٤ ـ ٣٣)$$

وبما أن $\int_{C_\omega} \frac{1}{z - \omega}\, dz = 2\pi i$

(انظر مثال ٧ حيث $z - \omega$ بدلاً من z) فإن:

$$\int_{C_\omega} \frac{f(z)}{z - w}\, dz = \int_{C_\omega} \frac{f(\omega)}{z - \omega}\, dz + \int_{C_\omega} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}\, dz$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz = 2\pi i\, f(\omega) + \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\, dz, \quad \text{.... (٤ - ٣٤)}$$

وبما أن الدالة f تحليلية على المجال D فإنها متصلة عليه وبالأخص عند ω لذلك نستنتج أنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ تحقق الشرط:

$$|z-\omega| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\omega)| < \epsilon$$

وبفرض أن نصف قطر الدائرة C_ω وهو r يحقق $r \leqslant \frac{1}{2}\delta$ فإن النقاط z التي تقع على هذه الدائرة تحقق:

$$|z-\omega| = r \leqslant \frac{1}{2}\delta < \delta$$

وبالتالي فإن:

$$|f(z) - f(\omega)| < \epsilon$$

وهذا يقتضي ما يلي:

$$\left| \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\, dz \right| < \frac{\delta}{r} \int_{C_\omega} |dz|$$

أي أن:

$$\left| \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\, dz \right| < 2\pi\epsilon$$

فإذا تركنا نصف قطر الدائرة r يقترب من الصفر فإن:

$$\lim_{r\to 0} \left(\int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\, dz \right) = 0$$

وبالعودة إلى المساواة (٤ ـ ٣٤) فإن أخذ النهاية للطرفين يعطي:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz = 2\pi i\, f(\omega) + \lim_{r\to 0} \int_{C_\omega} \frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega}\, dz$$

وهذا ينهي اثبات النظرية لأنه يعطي المساواة المطلوبة.

مثـال ١٤:

جد قيمة التكامل $\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}\,dz$ في الحالات التالية:

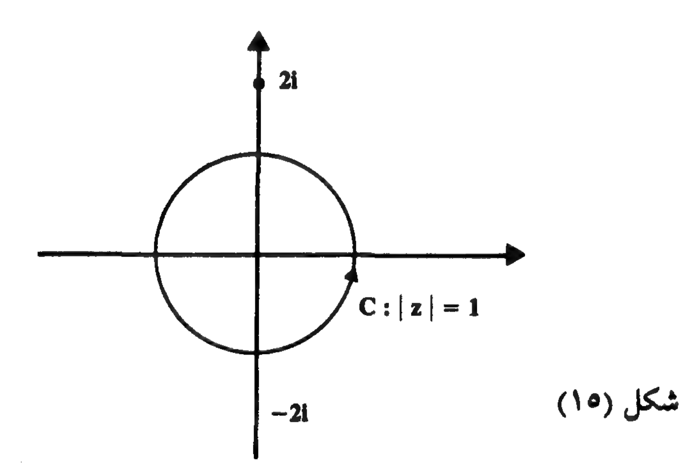
أ ـ إذا كانت C تمثل الدائرة $|z| = 1$ بالاتجاه الموجب

ب ـ إذا كانت C تمثل الدائرة $|z - 2i| = 1$ بالاتجاه الموجب

جـ ـ إذا كانت C تمثل الدائرة $|z + 2i| = 1$ بالاتجاه الموجب.

الحـل:

أ بما أن الدالـة $\frac{ze^z}{z^2+4}$ تحليلية في مجـال مترابط تـرابطاً بسيـطاً يحتوي المســار $C : |z| = 1$ (لأن أصفـار المقـام $-2i, 2i$ تقـع خـارج الكانتور) فإن نظرية كوشي ـ كورسات تبين أن: $\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}\,dz = 0$



شكل (١٥)

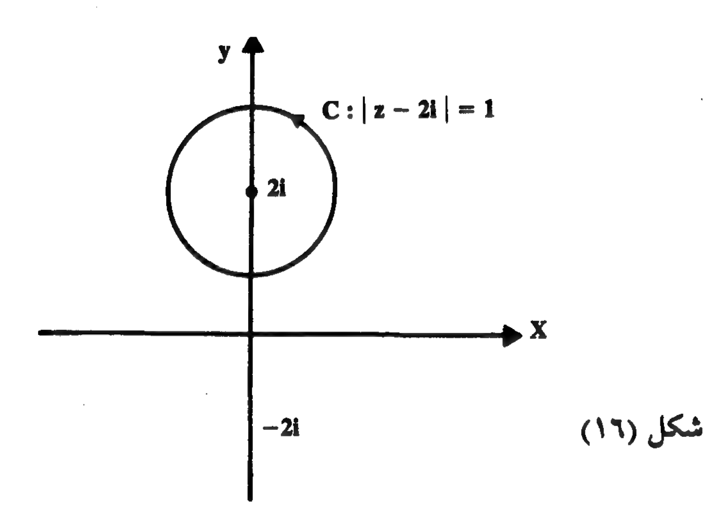
ب ـ بمـا أن أحد أصفـار المقام $z = 2i$ يقـع داخل المسـار C فإن المكـامل ليس تحليليـاً في مجال يحتـوي هذا المسـار. وبالتـالي فإن نـظرية كـوشي ـ كورسات لا تنطبق وهنا نستعين بنظرية كوشي للتكامل حيث إن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}\,dz = \int_C \frac{ze^z / (z + 2i)}{(z - 2i)}\,dz$$

فتكون الدالة $f(z) = \frac{ze^z}{z+2i}$ تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً يحتـوي على المســار $C : |z - 2i| = 1$ وهذا يعني أن شروط نـظريـة كوشي تتحقق لنستنتج أن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}\, dz = 2\pi i\, f(2i)$$

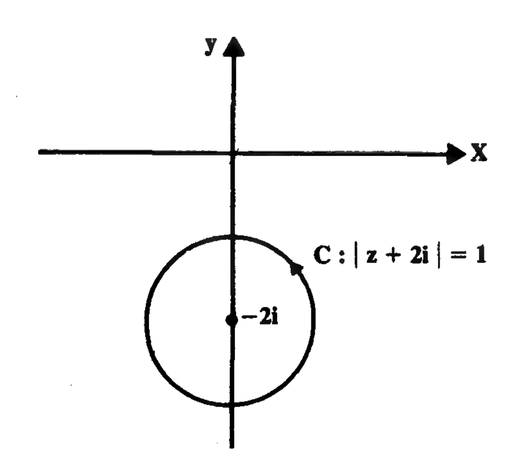
$$= \pi\, ie^{2i}$$



شكل (١٦)

جـ ـ بنفس أسلوب فرع (ب) نستنتج أن:

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+4}\, dz = \int_C \frac{ze^z / (z-2i)}{z + 2i} = \pi ie^{-2i}$$



شكل (١٧)

إن معنى نظرية كوشي يفيد بأن سلوك الدالة التحليلية في داخل مجال متـرابط ترابطاً بسيطاً يتحدد بسلوك الدالة على حدود ذلك المجال أي على كانتـور مغلق وبسيط يحيط بذلك المجال.

النظرية التالية تتعلق بمشتقة الدالة التحليلية وتمثيلها بصيغة تكامل مسار.

نظرية ١١:

نفرض أن الدالة $f(z)$ متصلة على المسـار المغلق البسيط C. عرِّف الـدالة $F(z)$ بالمساواة التالية:

$$F(z) = \int_C \frac{f(s)}{s - z}\, ds \quad \ldots\ldots (٣٥ - ٤)$$

لكـل z لا تقع عـلى المسـار C فـإن $F(z)$ تحليليـة والمشتقـة $F'(z)$ حسب المساواة التالية:

$$F'(z) = \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds \quad \ldots\ldots (٣٦ - ٤)$$

لكل z لا تقع على المسار C.

البرهـــان:

لايجاد المشتقة نجد الكسر التالي:

$$\begin{aligned}\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left\{ \int_C \frac{f(s)}{s - z - \Delta z}\, ds - \int_C \frac{f(s)}{s - z}\, ds\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_C \left(\frac{1}{s - z - \Delta z} - \frac{1}{s - z} \right) f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_C \frac{\Delta z\, f(s)}{(s - z - \Delta z)\,(s - z)}\, ds\end{aligned}$$

لذلك فإن:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_C \frac{f(s)}{(s - z - \Delta z)\,(s - z)}\, ds \quad \ldots\ldots (٣٧ - ٤)$$

ثم نجد الفرق بين الطرف الأيمن للمعادلتين (٤ - ٣٧)، (٤ - ٣٦) وهو

$$\omega = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds$$

$$= \int_C \left[\frac{1}{(s - z - \Delta z)(s - z)} - \frac{1}{(s - z)^2}\right] f(s)\, ds$$

$$= \int_C \frac{\Delta z}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2}\, f(s)\, ds$$

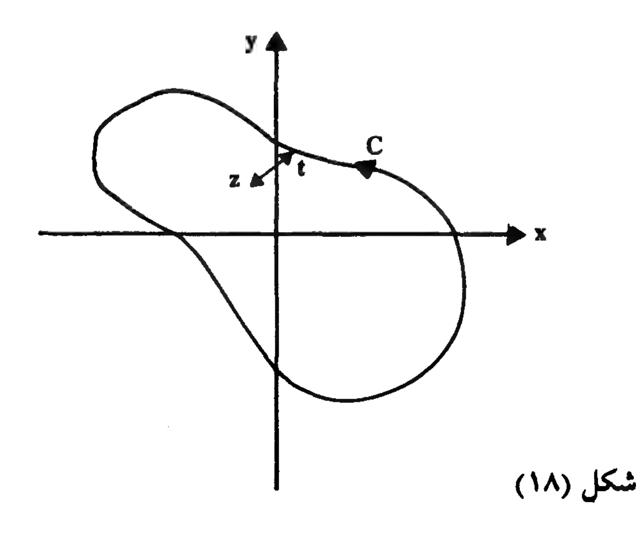
لذلك فإن:

$$\omega = \Delta z \int_C \frac{f(s)}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2}\, ds \quad \ldots\ldots (٤ - ٣٨)$$

إذا استطعنا اثبات أن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $|\Delta z| < \delta$ فإن $|\omega| < \epsilon$ مما يفيد بأن

$$F'(z) = \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds$$

مما ينهي إثبات النظرية لذلك نقول افرض أن t تمثل أقصر مسافة بين النقطة z والمسار C لذلك فإن لكل s تقع على المسار C تكون $|s - z| \geqslant t > 0$



شكل (١٨)

وبما أن الدالة $f(s)$ متصلة على المسار C فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K يحقق $|f(s)| \leqslant K$ لكل s تقع على المسار C. وكذلك بتطبيق متباينة المثلث نستنتج أن:

$$|s - z - \Delta z| > |s - z| - |\Delta z|$$

وبفرض أن: $|\Delta z| < \delta < \frac{1}{2} t$

نستنتج أن: $|s - z - \Delta z| > \frac{1}{2} t$

وبالتالي فإن:

$$\left| \int_C \frac{f(s)\, ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right| \leqslant \int_C \frac{|f(s)|\, |ds|}{|s - z - \Delta z|\, |s - z|^2}$$

$$< \frac{2K \cdot L}{t^3} < \frac{K \cdot L}{4\delta^3}$$

حيث إن L تمثل طور الكانتور C. وبالتعويض في (٤ ـ ٣٨) فإن:

$$|\omega| \leqslant |\Delta z| \left| \int_C \frac{f(s)\, ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right|$$

$$< \frac{|\Delta z|\, K \cdot L}{4\delta^3} < \frac{K \cdot L}{4\delta^2} < \epsilon$$

وبفرض أن δ تحقق $\delta^2 = \frac{K \cdot L}{4\epsilon}$،

ينتهي برهان النظرية.

مثـال ١٥:

جد قيمة التكامل $\int_C \frac{e^{zi}}{(z - \pi i)^2}\, dz$

إذا كان C يمثل الدائرة $|z - \pi i| = 1$.

الحـــل:

بتطبيق النظرية السابقة نستنتج أن:

$$\int_C \frac{e^{zi}}{(z - \pi i)^2} dz = 2\pi i\, f'(\pi i)$$

حيث إن $f(z) = e^{zi}$ وبالتالي ينتج

$$\int_C \frac{e^{zi}}{(z - \pi i)^2} dz = 2\pi i\,(ie^{-\pi}) \quad = -\, 2\pi e^{-\pi}$$

مثـــال ١٦:

جد قيمة التكامل: $\int_C \frac{\cos z}{z\,(z + i)^2} dz$

في الحالات التالية:

أ - $C : |\, z \,| = \frac{1}{2}$

ب - $C : |\, z + i \,| = \frac{1}{2}$

جـ - $C : |\, z - 2i \,| = 1$

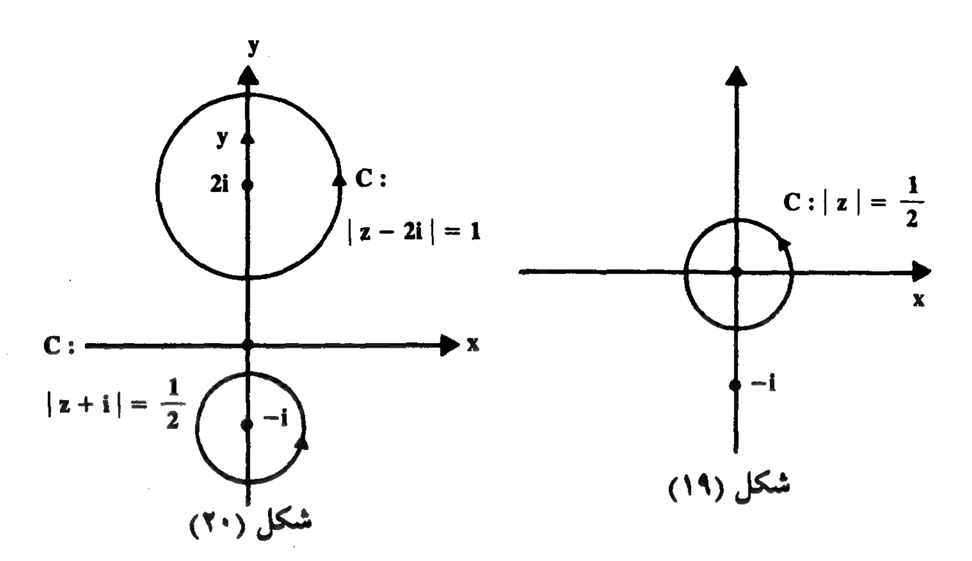
الحـــل:

أ - بايجاد أصفار المقام $0, -i$ نلاحظ أن القيمة $z = 0$ تقع في المنطقة الـداخلية للمســار C الذي يمثـل $|\, z \,| = \frac{1}{2}$ أما القيمـة $-i$ فتقـع خارجه لذلك وبما أن:

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z + i)^2}$$

تحليلية على مجـال يحتوي هـذا المسار فـإن نظريـة كوشي للتكـامل قـابلة للتطبيق لنحصل على ما يلي:

$$\int_C \frac{\cos z}{z\,(z + i)^2} dz = 2\pi i\, f(0) \quad = -\, 2\pi i.$$



شكل (٢٠)

شكل (١٩)

ب ـ وبما أن القيمة $-i$ تقع داخل المسار $C: \; |z+i| = \frac{1}{2}$ والقيمة 0 تقع خارجه وان الدالة:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}$$

تحليلية على مجال D يحتوي المسار C فإن النظرية ١١ قابلة للتطبيق لنحصل على:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\, dz = \int_C \frac{\cos z / z}{(z+i)^2}\, dz$$

$$= 2\pi i\, f'(-i)$$

وبما أن

$$f'(z) = \frac{-z \sin z - \cos z}{z^2}$$

فإن

$$f'(-i) = \cos i + i \sin i$$

وبالتالي فإن:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\, dz = 2\pi i(\cos i + i \sin i)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{e}\right) i$$

جـ ـ أمـا في حـالـة كـون أصـفـار المقـام $0, -i$ خـارج المـسـار $C: |z - 2i| = 1$ فإن:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\, dz = 0 \qquad \text{(لماذا؟)}.$$

النظرية ١١ تبين أن الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

قابلة للاشتقاق عند كل نقطة z لا تقع على المسار C وأن:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\, ds$$

وبتكرار نفس البرهان يمكن اثبات أن:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^3}\, ds$$

وبـالاستقراء الـرياضي يمكن اثبـات النتيجة التـاليـة التي تسمى نـظريـة كـوشي للمشتقة.

نتيجة ١٢:

بفـرض أن الدالـة f تحليلية عـلى مجال مـترابط ترابـطاً بسيطاً ويحتـوي المسار المغلق البسيط C فإن:

$$f^{n}_{(z)} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\, ds \quad \ldots\ldots (٤ - ٣٩)$$

لكل نقطة z لا تقع على المسار C و(n عدد صحيح موجب).

إن لهذه النتيجة معنى لطيفاً وهو أن الدالة التحليليـة f قابلة لـلاشتقاق لأيـة درجة نريد أي أن كل المشتقات لهذه الدالة موجودة وتحليلية كذلك.

نتيجة ١٣ :

لأي دالة f تحليلية على مجال ما تكون المشتقات $f', f'', \ldots, f^n, \ldots$ موجودة وتحليلية على D.

البرهـان:

بفرض أن z_0 تنتمي في D، بما أن D مفتوح فإنه يوجد $r > 0$ بحيث إن القرص $\{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ محتوى في D وبالتالي فإن الكانتور $C : |z - z_0| = r$ في D وبتطبيق نتيجة ١٢ نحصل على المطلوب.

مثـال ١٧ :

جد قيمة $\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz$

حيث إن C دائرة الوحدة، n عدد صحيح موجب أو صفر.

الحـل:

بفرض أن $n = 0$ والقيمة $z_0 = 0$ صفر المقام فإن:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i f(0)$$
$$= 2\pi i$$

وبفرض أن $n \geqslant 1$ والقيمة $z_0 = 0$ صفر المقام فإن:

$$\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f_0^n$$

وبما أن الدالة $f(z) = 1$ لكل z في المجال الذي يحتوي الكانتور فإن $f_0^n = 0$ لكل $x \geqslant 1$ وبالتالي:

$$\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = 0, \quad n \geqslant 1.$$

تمارين ٤ ـ ٣

١ ـ إذا كان C يمثل الدائرة $|z| = 3$ جد قيمة التكاملات التالية:

أ ـ $\int_C \frac{z e^z}{z-1} dz$ ب ـ $\int_C \frac{\cos 2z}{z - \frac{\pi}{3} \cdot i} dz$

جـ ـ $\int_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^5} dz$ د ـ $\int_C \frac{\tan z}{(z-1)(z+1)} dz$

هـ ـ $\int_C \frac{z^3}{(z-i)^3} dz$.

اقتراح: استعن بتجزئة الكسر $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$

٢ ـ جد قيمة التكامل $\int_C \frac{\sin 2z}{z^3 - 3iz^2} dz$

في الحالات التالية:

أ ـ C هو المسار في الشكل (٢١).
اقتراح: اكتب $C = C_1 + C_2$
وجزىء التكامل.

ب ـ $C : |z-3| = 2$

جـ ـ $C : |z| = 1$

د ـ $C : |z-3i| = 2$

شكل (٢١)

٣ ـ برهن ما يلي:

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

إذا كان C يمثل الدائرة $|z - z_0| = 1$.

٤ ـ نفرض أن C يمثل القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$ بالاتجاه الموجب وأن الدالة $F(z)$ معرفة بالمساواة

$$F(z) = \int_C \frac{3s^2 - 2s + 1}{s - z}\, dz$$

لكل z لا تقع على الكانتور C جد قيمة ما يلي:

أ ـ $F(2), F(i)$

ب ـ $F'(i), F''(-i)$

جـ ـ $F(4), F(3i)$

٥ ـ إذا كان C أي كانتور مغلق وبسيط والدالة $f(z)$ معرفة بالمساواة

$$f(z) = \int_C \frac{s^3 - 2s}{(s - z)^4}\, ds$$

لكل z لا تقع على الكانتور C فبرهن أن

$$f(z) = \begin{cases} 2\pi i, & (\text{لكل } z \text{ داخل الكانتور } C) \\ 0, & (\text{لكل } z \text{ خارج الكانتور } C) \end{cases}$$

٦ ـ إذا كانت الدالة f تحليلية على مجال يحتوي الدائرة $C: | z - z_0 | = r$ فبرهن (باستخدام نظرية كوشي للتكامل) ان:

أ ـ $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ti})\, dt = 2\pi\, f(z_0)$

تسمى هذه المساواة نظرية جاوس للقيمة الوسطى.

ب ـ $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ti})\, e^{-nti}\, dt = \dfrac{2\pi\, r^n f^n(z_0)}{n!}$

اقتراح: استعن بالمعادلة الوسيطية للدائرة ثم طبق نظرية كوشي للتكامل.

٧ ـ إذا كانت الدالة f تحليلية على مجال يحتوي كانتور مغلق وبسيط C فبرهن

$$\int_C \frac{f'(s)}{s - z}\, ds = \int_C \frac{f(z)}{(s - z)^2}\, ds$$

لكل z لا تقع على الكانتور C نفسه.

٨ ـ نفرض أن C يمثل دائرة الوحدة بيّن ان

$$\int_C z^{-1} e^z \, dz = 2\pi i$$

ثم بالاستفادة من المعادلة الوسيطية لدائرة الوحدة بين أن:

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \, dt = \pi$$

٩ ـ من المعروف أن كثيرة حدود ليجندر يمكن أن تكتب بالصيغة:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2 - 1)^n\right]$$

استعن بنظرية كوشي للتكامل لإثبات أن

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{(s^2 - 1)^n}{2^{n+1} (s - z)^{n+1}} \, ds.$$

١٠ ـ إذا كانت f تحليلية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً والمسار C يمثل كانتوراً مغلقاً وبسيطاً وكانت النقطتان z, w في المنطقة الداخلية للكانتور فبرهن أن:

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - w)} \, ds$$

ماذا نستنتج إذا تركنا النقطة w تقترب من z؟

٤ ـ ٤ نتائج نظرية كوشي للتكامل:

نعرض في هذا البند بعض النتائج الهامة لنظرية كوشي للتكامل وقبلها لنا أن نتساءل عن امكانية تحقق عكس نظرية كوشي ـ كورسات (التي تقول إن قيمة تكامل الدالة التحليلية في مجال يحتوي على الكانتور المغلق البسيط صفر)، وهو إذا حدث أن تكون قيمة تكامل دالة متصلة على مجال يحتوي كانتوراً مغلقاً وبسيطاً صفراً فهل تكون الدالة تحليلية على ذلك المجال، المثال التالي يشير إلى إمكانية حدوث ذلك دون أن تكون الدالة تحليلية.

مثـال ١٨:

جد قيمة التكامل: $\int_C \frac{\sin z}{z}\, dz$

حيث C تمثل دائرة الوحدة.

الحـل:

بتطبيق نظرية كوشي للتكامل نستنتج أن:

$$\int_C \frac{\sin z}{z}\, dz = 2\pi i \sin 0 \quad = 0$$

ومن الواضح أن الدالة $\frac{\sin z}{z}$ ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$ بينما قيمة التكامل تساوي صفراً. النظرية التالية تسمى نظرية موريرا تمثل معكوس نظرية كوشي ـ كورسات.

نظرية موريرا (١٤):

بفرض أن الدالة f متصلة على المجال D إذا تحقق الشرط $\int_C f(z)\, dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط يقع في المجال D فإن الدالة f تحليلية على D.

البرهـــان:

بمـا أن $\int_C f(z)\, dz = 0$ لكل كـانتور مغلق وبسيط C يقـع في المجـال D فإن $\int_C f(z)\, dz$ مستقل عن المسار C لذلك وبالاستفادة من برهان نظريـة ٨ يمكن أن نثبت أن:

$$F(z) = \int_{\alpha}^{z} f(s)\, ds$$

دالة تحليلية على المجال D وأن $F'(z) = f(z)$ وبما أن الدالـة $F(z)$ تحليلية على المجال D فإن نتيجة ١٣ تؤكد أن جميع مشتقـات $F(z)$ موجـودة ومتصلة وبشكل خاص $F'(z)$ وبما أن $F'(z) = f(z)$ فإن الدالة f قابلة للاشتقـاق على D وبالتالي تكون تحليلية عليه.

إذا كان المجال D في نظرية موريرا مترابطاً ترابطاً بسيـطاً فإن نـظرية مـوريرا تمثل عكس نظرية كوشي ـ كورسات.

النظرية التالية تسمى متباينة كوشي.

نظرية ١٥ (متباينة كوشي):

نفـــرض أن الـدالـــة f تحليليـة عـــلى المجـال D الـــذي يحتـوي الكـــانتـور C : $|s - z| = r$ (وهـو الدائـرة التي مركـزها z ونصف قـطرها r بـالاتجاه الموجب). فإذا كان k عدداً حقيقياً موجباً يحقق $|f(s)| \leqslant k$ لكل s تقع على الكانتور C فإن المشتقة النونية للدالة f عند النقطة w تحقق المتباينة:

$$|f^{n}(z)| \leqslant \frac{n!\, k}{r^{n}}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(٤ ـ ٤٠)}$$

البرهـــان:

بتطبيق النتيجة ١٢ نستنتج أن:

$$f^{n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^{n+1}}\, ds$$

وبما أن $|f(z)| \leq k$ لكل s تقع على الكانتور C وان $|s - z| = r$ فإن

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{k}{r^{n+1}} \int_C |ds|$$

$$\leq \frac{n!\, k\, 2\pi r}{2\pi\, r^{n+1}} = \frac{n!\, k}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ان متباينة كوشي تلعب دوراً هاماً في اثبات نظرية ليوڤيل التي تبين أنه إذا كانت الدالة الكلية محدودة فإنها تكون ثابتة القيمة.

نظرية ١٦ (ليوڤيل):

إذا كانت f دالة تحليلية ومحدودة على المستوي المركب (أي يوجد $k > 0$ بحيث إن $|f(z)| \leq k$ لكل عدد مركب z) فإن f دالة ثابتة القيمة.

البرهـان:

بما أن الثابت k في النظرية السابقة مرتبط بقيم الدالة على الكانتور C نرمز له بالرمز k_r حيث r نصف قطر الدائرة C لنحصل على:

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!\, k_r}{r^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

وبما أن $|f(z)| \leq k$ لكل عدد مركب z (ليس فقط على الكانتور C) فإن $k_r \leq k$ وبفرض أن $n = 1$ نستنتج أن:

$$|f'(z)| \leq \frac{k}{r}$$

وبما أن البسط في الطرف الأيمن لا يعتمد على r وكذلك الطرف الأيسر فإذا أخذنا نهاية الطرفين عندما تؤول r الى ∞ فإن:

$$f'(z) = 0$$

لكل عدد مركب z وبالتالي فإن $f(z) = \alpha$ قيمة ثابتة.

مثــال ١٩ :

بين أن الدالة $\cos z$ ليست محدودة.

الحــل :

من المعلوم أن الـدالة $\cos z$ دالـة تحليلية عـلى كل المستـوي المـركب (أي كليـة) وهي كذلـك ليست ثابتـة القيمة وبـالتالي فـإن نظريـة ليوفيـل تؤكـد أن $\cos z$ ليست محدودة. (ولرؤيـة ذلك بـطريقة أخـرى نثبت $x = 0$ ونترك قيمة y تزداد بدون توقف لنجد أن: $\cos z = \cos (y i) = \cosh y$

وبالتالي فإن:
$$\lim_{y \to \infty} \cos z = \lim_{y \to \infty} \cosh y = \infty$$

أي أن ليست محدودة).

ومن التطبيقات الهامة لنظرية ليوفيل كذلك النتيجة الجبرية التي تقول بـوجود عـلى الأقل صفـر واحد لكثـيرة الحـدود من الـدرجـة n. وهـذه النتيجـة تسمى النظرية الأساسية للجبر.

نتيجة ١٧ (النظرية الأساسية للجبر):

يوجد لكثيرة الحدود من الدرجة n على الأقل جذر واحد (صفر واحد).

البرهــان:

نفرض أن $P_n(z)$ كثيرة الحدود من الدرجة n أي أن:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0, \alpha_n \neq 0$$

حيث إن $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ أعـداد مركبـة. كثيرة الحـدود هـذه يمكن كتـابتهـا بالصيغة التالية:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n \left\{1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right\}$$

وبتطبيق متباينة المثلث نستنتج أن:

$$\left|1+\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right| \geqslant 1-\left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right|$$

وبفرض أن $|z| \to \infty$ فإنه يمكن أن نفرض أن:

$$|z| > 3nk \geqslant 1, \left(\frac{1}{|z|} < \frac{1}{3nk}\right)$$

حيث إن:

$$k = \max, \left\{1, \left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right|, \dots, \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right|, \left|\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right|\right\}$$

وبالتالي ينتج أن:

$$\left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right| \frac{1}{|\alpha|} + \dots + \left|\frac{\alpha_0}{|\alpha_n|}\right| \frac{1}{|z|^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{3n}+\dots+\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}.$$

ومن ذلك فإن:

$$\left|1+\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n z}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_n z^n}\right| \geqslant 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي ينتج أن:

$$|P_n(z)| \geqslant \frac{2}{3} |\alpha_n| |z|^n$$

وبفرض أنه لا يوجد عدد مركب z بحيث إن $P_n(z) = 0$

فإن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$

تحليلية على جميع الأعداد المركبة أي أنها كلية وكذلك:

$$|f(z)| = \frac{1}{|P_n(z)|} \leqslant \frac{3}{2\,|\alpha_n|\,|z|^n}$$

وبما أن العدد $|\alpha_n|$ ثابت وبفرض أن $|z| \to \infty$ فإن $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$
وبالتالي لكل $K > 0$ يوجد $R > 0$ بحيث إن:

$$|f(z)| \leqslant K \quad \ldots\ldots (٤ - ٤١)$$

لكل z بحيث $|z| \geqslant R$.

وبما أن $|f(z)|$ دالة حقيقية القيمة وهي متصلة على القرص $|z| \leqslant R$ فإنه يوجد M بحيث أن

$$|f(z)| \leqslant M, |z| \leqslant R \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٢)$$

ومن (٤ - ٤١) و(٤ - ٤٢) نستنتج أن الدالة f محدودة القيمة على كل المستوي المركب وبالتالي فإن نظرية ليوفيل تؤكد أن $f(z)$ دالة ثابتة القيمة ومنها فإن كثيرة الحدود $P_n(z)$ ثابتة القيمة وهذا تناقض لأن كثيرة الحدود ليست ثابتة القيمة.

النتيجة الأخرى الهامة من نتائج نظرية كوشي قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة الذي يجيب على السؤال اين تحدث القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ إن وجدت.

نظرية ١٨:

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D، إذا كانت الدالة f ليست ثابتة القيمة على D فإنه لا يوجد قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$ في المجال D، أي أنه لا يوجد w في D تحقق الشرط:

$$|f(w)| \leqslant |f(z)| \quad \text{لكل } z \text{ في } D \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٣)$$

البرهـــان:

بالاستفادة من تمرين ٦ فرع أ من البند السابق نستنتج أن

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{ti})\, dt$$

وهذا يفيد بأن قيمة الدالة f على مركز الدائرة

$$C : z = w + R\, e^{ti}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 < r < R.$$

حيث إن R تحقق $|z - w| = R$ محتـواة في D يساوي المتـوسط الحسابي لقيم هذه الدالة على الدائرة ومن ذلك نستنتج أن:

$$|f(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})|\, dt$$

فإذا فرض أنه يوجد للدالة قيمة عظمى عند w مثلاً فإن:

$$|f(z)| \leqslant |f(w)|,$$

لكل z تحقق $|z - w| = r \leqslant R$ وبالتالي ينتج:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})|\, dt \leqslant |f(w)|$$

ومن هذه المتباينات ينتج أن:

$$|f(w)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w + re^{ti})|\, dt$$

وبلغة أخرى فإن:

$$\int_0^{2\pi} \Big(|f(w + re^{ti})| - |f(w)|\Big)\, dt = 0$$

لكل $r : 0 < r \leqslant R$ وبالتالي فإن:

$$|f(w)| = |f(w + re^{ti})|$$

لكل t و r بحيث إن $0 < r \leqslant R, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

وبالعودة إلى المتغير z فإن: $|f(z)| = |f(w)|$
لكل z تحقق $0 \leqslant |z - w| < R$.

وهـذا يفيدنـا بأن مقـدار الدالـة f وهو $|f(z)|$ مقـدار ثـابت عـلى المجـال $0 \leqslant |z - w| < R$ وبما أن الدالة f تحليلية على هذا المجال فإنها تكون ثابتة أي أن $f(z)$ ثابتة القيمة لكل z تحقق $0 \leqslant |z - w| < R$ وهـذا يناقض الفـرض بأن f ليست ثـابتة القيمـة وبالتـالي فإنـه لا يـوجـد w في D بحيث إن $|f(w)|$ قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$.

ويمكن أن يكتب قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة بالصيغة التالية:

نظرية ١٩:

نفـرض أن الدالـة f تحليلية وليست ثـابتة القيمـة عـلى المجـال D فـإذا كـان الكانتور C يمثل حدود المجال D وكانت B ترمز للمنطقة التي تتكون من المجال D وحدوده C وإذا كانت الدالة f متصلة عـلى المنطقـة المغلقة B فـإن $|f(z)|$ تـأخذ قيمتهـا العظمى عـلى إحدى نقـاط الكانتـور C أي يوجـد نقـطة w عـلى الكانتور C بحيث إن:

$$|f(z)| \leqslant |f(w)| \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ٤٤)$$

لكل z في B.

البرهـــان:

بما أن الدالة f تحليلية وليست ثابتة القيمة على المجال D فإن النظرية السابقة تؤكد أن الدالة $|f(z)|$ لا تأخذ قيمة عـظمى على أيـة نقطة من نقـاط المجال D. وبما أن $|f(z)|$ متصلة على المنطقة المغلقة B فإن التفاضل والتكـامل يؤكـد أنـه يوجـد قيمة عـظمى للدالة $|f(z)|$ عـلى إحدى نقـاط المنطقـة المغلقـة B وبالتالي فلا بد أن تكون هذه النقطة واقعة على حدود المجال D وهو الكانتور C أي يوجد نقطة w على C بحيث إن: $|f(z)| \leqslant |f(w)|$

لكل نقطة z في B.

مثـــال ٢٠:

بفرض أن $f(z) = \sin z$ جد القيمة العظمى للدالـة $|f(z)|$ في المنطقـة المغلقة:

$$B = \left\{z: 0 \leqslant \text{Re. } z \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \text{Im. } z \leqslant 1\right\}$$

الحــل:

بمـا أن الدالـة $\sin z$ تحليلية وليست ثـابتة فـإن $|\sin z|$ لا تأخـذ قيمة عظمى على النقاط الداخلية للمنطقة B ولكنها تأخذ قيمتها العظمى على إحدى النقاط الحدودية للمنطقة B وبما أن:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

فإن

$$|\sin z|^2 \leqslant 1 + \sinh^2 1 = \cosh^2 1$$

وبـالتالي فـإن $|\sin z|$ تأخـذ قيمتهـا العـظمى عنـد $z = \frac{\pi}{2} + i$ وهي $\cosh 1$.

تمارين ٤ ـ ٤

١ ـ نفرض أن الدالة f تحليلية على جميع الأعداد المركبة بحيث يوجد عدد حقيقي موجب M يحقق الشرط $Re.\, f(z) \leqslant M$ لكل z. برهن أن f ثابتة القيمة.

اقتراح: طبق نظرية ليوفيل على الدالة $g(z) = e^{f(z)}$.

٢ ـ جد جميع الدوال التحليلية على المجال $D : |z| < 3$ التي تحقق الشرط $f(0) = -i$ وأن $|f(z)| \leqslant 1$ لكل z في D.

٣ ـ نفرض أن f دالة تحليلية على المجال D المحدود بالكانتور المغلق البسيط C ويحقق:

$$|f(z) - 2| < 1$$

لكل z تقع على الكانتور C. برهن أنه لا يوجد عدد مركب w بحيث إن $f(w) = 0$.

٤ ـ بين أن أي كثيرة حدود P_n من الدرجة n يمكن أن تكتب على الصيغة

$$P_n(z) = \alpha_n (z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n)$$

حيث إن $w_1, w_2, \dots, w_n$ تمثل الجذور (المركبة) لكثيرة الحدود $P_n(z)$ (مع تكرار الجذور).

٥ ـ إذا كانت $f(z) = \alpha z + \beta$ معرفة على المجال

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

بين أنه يوجد قيمة عظمى للدالة $|f(z)|$ وهي

$$\max |f(z)| = |\alpha| + |\beta|$$

وإن هـذه القيمة تحـدث عند $w = e^{\theta_0 i}$ عـلى الكانتـور $C : |z| = 1$
حيث إن:

$$\theta_0 = \arg \alpha - \arg \beta$$

٦ - برهن قانون القيمة الصغرى لمقدار الدالة $|f(z)|$ بـإثبات أن $|f(z)|$ ليس لها قيمة صغرى على المجـال D إذا كانت تحليليـة وليست ثابتـة وأن القيمة الصغرى تحدث عند إحدى النقاط الحدودية للمجال D.

اقتراح: طبق القانون على الدالة:

$$g(z) + \frac{1}{f(z)}$$

٧ - جد القيمة العظمى للدالة $f(z) = \cos z$ على المنطقة المغلقة

$$R = \left\{z : 0 \leqslant \text{Re. } z \leqslant \frac{\pi}{2} , 0 \leqslant \text{Im. } z \leqslant 2\right\}$$

اقتراح: استعن بالمثال ٢٠.

٨ - إذا كانت الدالة f كلية وتحقق الشرط $|f(z)| \geqslant 1$ لكل عدد مركب z.
برهن أن $f(z)$ ثابتة القيمة.

٩ - بفـرض أن الدالـة f كلية وتحقق المتبـاينة $|f(z)| \leqslant k|z|$ لكـل الأعداد المـركبة z (حيث k عـدد حقيقي موجب ثـابت) بـرهن أن $f''(z) = 0$ لكل z وأن

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

١٠ - بـفـرض أن الـدالـة f تحليليـة عـلى المجـال $D : |z| < 3$ وأن $|f(z)| \leqslant 5$ لكـل z تقع عـلى الدائـرة $|z-1| = 1$ جد حـداً أعـلى للمقدارين

$$|f''(0)| , |f''(1)|$$

١١ - بفرض أن الدالـة f تحليلية وليست ثـابتة القيمـة على المجـال D المحدود بالكانتور البسيط المغلق C برهن أنه إذا كانت $|f(z)|$ ثابتة القيمة على الكانتور C فإنه يوجد على الأقل عدد واحد w في D يحقق $f(w) = 0$.

٤ ـ ٥ تطبيقات

يمكن أن نحصل على نتيجة مشابهة لقانون القيمة العظمى (أو الصغرى) لمقدار الدالة التوافقية اعتماداً على قانون القيمة العظمى لمقدار الدالة المركبة.

نظرية ٢٠:

نفرض أن $u(x, y)$ دالة توافقية على مجال مترابط ترابطاً بسيطاً D فإذا كانت $u(x, y)$ ليست ثابتة القيمة على D فإنه لا يوجد نقطة $w = (x_0, y_0)$ في D تحقق:

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x_0, y_0)|$$

لكل (x, y) في D.

وإذا كانت الدالة التوافقية u متصلة على المجال D والنقاط الحدودية له فإنها تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية أي يوجد نقطة حدودية $w = (x_0, y_0)$ للمجال D تحقق:

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x_0, y_0)| \quad \ldots\ldots (٤ - ٤٥)$$

البرهان:

بما أن $u(x, y)$ توافقية على المجال D فإنه يوجد لها مرافق توافقي أي يوجد دالة توافقية $v(x, y)$ بحيث إن الدالة $f(z) = u + vi$ تحليلية على المجال وبالتالي فإن الدالة:

$g(z) = e^{f(z)} = e^u e^{vi}$،

تحليلية على المجال D وبتطبيق قانون القيمة العظمى للدوال المركبة ولكون الدالة $|g(z)|$ ليست ثابتة القيمة فإنها لا تأخذ قيمتها العظمى عند أي من نقاط المجال D ولكنها (وبما أنها متصلة على المجال D وعلى النقاط الحدودية لهذا

المجال) تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية وبملاحظة أن:

$$|g(z)| = |e^u e^{vi}| = e^u \quad \ldots . \quad (٤ - ٤٦)$$

فإن e^u لا تأخذ قيمتها العظمى عند أي من نقاط المجال D ولكنها تأخذ قيمتها العظمى عند إحدى النقاط الحدودية وبما أن الدالة الأسية الحقيقية متزايدة القيمة فإنه لا يوجد نقطة $w = (x_0, y_0)$ في D تحقق:

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x_0, y_0)|$$

لكل (x, y) في D.

بل يوجد إحدى النقاط الحدودية $w = (x_0, y_0)$ تحقق ذلك الشرط... وهذا ينهي اثبات النظرية.

نظرية ٢١:

نفرض أن $u(x, y)$ دالة توافقية على مجال D يحتوي القرص $|z| \leqslant R$. فإن

$$u(re^{ti}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{\theta i})\, d\theta}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)} \quad \ldots . \quad (٤ - ٤٧)$$

البرهـان:

نفرض $v(x, y)$ تمثل المرافق التوافقي للدالة $u(x, y)$ على المجال D وبالتالي فإن الدالة $f(z) = u + vi$ تحليلية على D. وبتطبيق نظرية كوشي للتكامل نستنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s - z}\, ds, \quad |z| < R$$

حيث C_R يمثل الدائرة $|z| = R$ بالاتجاه الموجب. فإذا ثبتنا مؤقتاً

$z : |z| < R$ فإن $R^2 \neq s\,\bar{z}$ لكل $s : |s| = R$ وبالتالي فإن الدالة:

$$g(s) = \frac{\bar{z}\, f(s)}{R^2 - s\,\bar{z}}$$

تحليلية على المجال D (وبشكل خاص على C_R) وبالتالي يكون:

$$\int_{C_R} g(s)\, ds = \int_{C_R} \frac{\bar{z}\, f(s)}{R^2 - s\,\bar{z}}\, ds = 0 \quad \ldots\ldots (٤ \text{ - } ٤٨)$$

ومن المعادلتين (٤ ـ ٤٧) و (٤ ـ ٤٨) نستنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(\frac{1}{s - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - s\,\bar{z}} \right) f(s)\, ds$$

وبجمع الكسرين والتعويض بالمعادلة الوسيطية للكانتور C_R ، $s = Re^{\theta i}$ ينتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{(R^2 - |z|^2)\, f(Re^{\theta i})}{(Re^{\theta i} - z)(R^2 - \bar{z}\, Re^{\theta i})}\, i\, Re^{\theta i}\, d\theta$$

$$= \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_{C_R} \frac{f(Re^{\theta i})\, d\theta}{(Re^{\theta i} - z)(Re^{-\theta i} - \bar{z})}$$

$$= \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_{C_R} \frac{u(Re^{\theta i}) + iv(Re^{\theta i})}{(Re^{\theta i} - z)\,\overline{(Re^{\theta i} - z)}}\, d\theta$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi} \int_{C_R} \frac{u(Re^{\theta i})}{|Re^{\theta i} - z|^2}\, d\theta$$

وبما أن $|z| < R$ فإن $z = re^{ti}$ حيث r عدد حقيقي موجب $0 \leq r < R$ وبالتالي فإن:

$$u(re^{ti}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{C_R} \frac{u(Re^{\theta i})}{|Re^{\theta i} - re^{ti}|^2}\, d\theta$$

وبإيجاد مقام كسر المكامل

$$|Re^{\theta i} - re^{ti}|^2 = (R\cos\theta - r\cos t)^2 + (R\sin\theta - r\sin t)^2$$
$$= R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)$$

وبذلك فإن:

$$u(re^{ti}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_{C_R} \frac{u(Re^{\theta i})}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)}\, d\theta$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

هذه النتيجة يمكن أن تفسر بأن الدالة التوافقيـة التي تكون متصلة عـلى مجال D والكانتور C_R الذي يمثل النقاط الحدودية لهذا المجـال يمكن أن توجـد قيمتها في داخل هذا المجال بمعرفة قيمتها على الكانتور C_R وهذا يمثل حلاً لحالة خاصة من مسألة معروفة تسمى مسألة ديرشلت.

تمرين ١:

إذا كانت $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ دالتين توافقيتين ومتصلتين على المجـال المحدود D ومتصلتين على النقاط الحدودية لهذا المجال بحيث إن $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ لكـل نقطة حـدودية (x, y) للمجـال D. بـرهن أن $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ لكل نقطة (x, y) في المجال D.

اقتراح: طبق نظرية ٢٠ على الدالة التوافقية $u = u_1 - u_2$

تمرين ٢:

إذا كانت الدالـة v تمثل المـرافق التوافقي للدالـة التوافقيـة u على المجـال D فـبرهن أن جميع المشتقـات الجزئيـة للدالتـين u و v بـالنسبـة للمتغـيرين x, y موجودة ومتصلة.

اقتراح: استفد من الحقيقة أن $f = u + vi$ تحليلية على D.

الفصل الخامس

تمثيل الدوال التحليلية بالمتسلسلات

SERIES REPRESENTATION OF ANALYTIC FUNCTIONS



الفصل الخامس

تمثيل الدوال التحليلية بالمتسلسلات

Series Representation of Analytic Functions

نتعرض في هذا الفصل للمتتاليات والمتسلسلات التي تتكون حدودها من أعداد مركبة وبالخصوص تعريف كل من نهاية المتتالية ومجموع المتسلسلة ونجد علاقة بين هذه المتتاليات والمتسلسلات المركبة وتلك الحقيقة التي بحثت في مواضيع التفاضل والتكامل والتحليل الحقيقي. ونعرض لبعض اختبارات التقارب ثم نخصص الدراسة لمتسلسلات تايلور وماكلورين ومتسلسلات القوى ثم كيفية تمثيل الدوال التحليلية بالمتسلسلات ثم متسلسلات لورانت وما تحتاج إليه من معرفة النقاط المتفردة والاصفار والنقاط القطبية.

٥ ـ ١ المتتاليات والمتسلسلات:

بفرض ان (z_n) متتالية من الاعداد المركبة فإن متسلسلة الأعداد المركبة هي $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n + \dots$

أما متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة فهي (S_n) حيث

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$$

ويمكن تعريف نهاية المتتالية ونهاية المتسلسلة في التعريف التالي:

تعريف ١ :

نفرض أن z_0 عدد مركب فإن z_0 نهاية المتتالية (z_n) (وبالرموز $z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$) عندما تزداد n بدون توقف إذا تحقق الشرط التالي:

لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon \quad \ldots\ldots \text{(٥ - ١)}$$

وعندما تسمى المتتالية (z_n) تقاربية للعدد المركب z_0. أما إذا لم يوجد عدد مركب مثل z_0 يحقق (٥ - ١) فإن المتتالية (z_n) تكون تباعدية.

وبالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ فإنها تكون تقاربية للعدد المركب S إذا كان $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ وعندئذ يسمى العدد المركب S مجموع المتسلسلة ويكتب بالصورة:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

وإذا لم تكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية فإنها تكون تباعدية وذلك عندما تكون المتتالية (S_n) تباعدية.

يمكن الاستفادة من الاختبارات التي سبق للقارىء دراستها في مساق التفاضل والتكامل. نذكر من هذه الاختبارات بعضها حيث يناسب ذلك. فيما يلي اختبارا المقارنة والنسبة بدون برهان.

نظرية ١ (اختبار المقارنة):

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$ (حيث K_n عدد حقيقي موجب) تقاربية وكانت $|z_n| \leq K_n$ لكل n بحيث $n = 0, 1, 2, \ldots$ فإن المتسلسلة المركبة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية.

نظرية ٢ (اختبار النسبة):

إذا كـانت (z_n) متتاليـة من الأعداد المـركبـة بحيث يـوجـد عـدد حقيقي موجب L بحيث

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

فإن :

أ ـ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية إذا كانت $L < 1$.

ب ـ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تباعدية إذا كانت $L > 1$.

جـ ـ الاختبار يفشل في اعطاء معلومات إذا كانت $L = 1$.

مثـــال ١ :

بين أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تقاربية إذا تحقق $|z| < 1$ وتباعـدية إذا كـان $|z| \geqslant 1$ ثم جد مجموع المتسلسلة إذا كانت تقاربية.

الحـــل:

بتطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن: $|z| = |re^{\theta i}| = r$

وبما أن r عدد حقيقي موجب فإن $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ متسلسلة هنـدسية وتكـون تقاربيـة عندما يكون $r < 1$ وتباعدية عندما تكـون $r \geqslant 1$ وبالتـالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تقاربية إذا تحقق $|z| < 1$ وتباعدية إذا تحقق $|z| \geqslant 1$ لإيجاد مجمـوع هذه المتسلسلة نجد متتالية المجاميع الجزئية لها وهي :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

وبالضرب بالعدد المركب z وطرح الناتج منها فإن :

$$S_n (1 - z) = 1 - z^{n+1}$$

وبالتالي فإن:

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

(ونترك للقارىء إثبات أن $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ إذا تحقق الشرط $|z| < 1$
وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} - \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

ومنها فإن:

$$(٥ - ٢) \;....\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

تسمى هذه المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ المتسلسلة الهندسية وهي تلعب دوراً هاماً في تمثيل كثير من الدوال بالمتسلسلات كما سنرى.

يمكن أن ننظر للمتتالية المركبة وكذلك المتسلسلة على أنها من متتاليتين أو متسلسلتين من الأعداد الحقيقية، وذلك بفرض أن $z_n = x_n + iy_n$ لنستنتج أن:

$$(٥ - ٣) \;....\; (z_n) = (x_n) + (y_n)\, i$$

وتسمى المتتالية $Re.\,(z_n) = (x_n)$ الجزء الحقيقي وكذلك المتتالية $Im.\,(z_n) = (y_n)$ الجزء التخيلي للمتتالية (z_n) وكذلك:

$$(٥ - ٤) \;....\; S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)$$

وتسمى المتسلسلة $Re.\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ الجزء الحقيقي والمتسلسلة $Im.\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ الجزء التخيلي للمتسلسلة S.

النظرية التالية تربط بين تقارب المتتالية (z_n) وتقارب كلا المتتاليتين $(y_n), (x_n)$.

نظرية ٣:

بفرض أن $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$ فإن:

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \quad \ldots\ldots (٥ - ٥)$$

البرهـــان:

بفرض أن:

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

فإن التعريف ١ يؤكد أنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon$$

وبما أن

$$|x_n - x_0| = |\text{Re.}\,(z_n - z_0)| < |z_n - z_0| < \epsilon,$$

$$|y_n - y_0| = |\text{Im.}\,(z_n - z_0)| < |z_n - z_0| < \epsilon$$

فإن:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

بالعكس إذا فرض أن:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

فبالتعريف ١ يكون:

لكل $\epsilon > 0$ يوجد N_1, N_2 بحيث إن:

$$n > N_1 \Rightarrow |y_n - y_0| < \epsilon / 2,$$

$$n > N_2 \Rightarrow |x_n - x_0| < \epsilon / 2$$

ويفرض أن $N = \max. \{N_1, N_2\}$ فإن $n > N \Rightarrow n > N_1, n > N_2$

وعندئذ يكون $|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \epsilon$

وهذا ينهي اثبات النظرية.

النظرية التالية تربط بين تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ وتقارب كلا المتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

نظرية ٤:

بـفـرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ وان $w = s + it$ فـإن $w = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n, t = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ٦)$$

البرهـان:

بما أن:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + i \sum_{k=0}^{n} y_n = s_n + i\, t_n$$

فإن النظرية السابقة تؤكد أن $w = \lim_{n \to \infty} w_n$

إذا وإذا فقط تحقق الشرطان: $s = \lim_{n \to \infty} s_n, \quad t = \lim_{n \to \infty} t_n$

مثـال ٢:

بين أن المتتالية التالية تقاربية ثم جد نهايتها

$$z_n = \frac{2n + i(n + 2)}{n + 1}$$

الحـــل:

بما أن

$$z_n = \frac{2n}{n+1} + i \frac{n+2}{n+1}$$

نبحث عن نهاية كل من المتتاليتين $\frac{n+2}{n+1}$ و $\frac{2n}{n+1}$ وبما أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 2 + i$$

مثـــال ٣:

بين أن المتسلسلة التالية تباعدية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

الحـــل:

بما أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

فإن اختبار ليبنتز للمتسلسلة المترددة يؤكد أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ تقاربية وكذلـك فإن اختبار المقارنة بين

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ يبين أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 > 0$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

اما أن تكونا تقاربيتين معاً أو تباعديتين معاً. وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متسلسلة تباعدية (لماذا؟) فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ تباعدية كذلك وعليه فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

متسلسلة تباعدية.

النظرية التالية تفيدنا في اختبار التباعد للمتسلسلات.

نظرية ٥:

أ - إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية فإن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

ب - اختبار التباعد: إذا كان $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تباعدية (ليست تقاربية).

البرهان:

يتم بملاحظة أن: $z_n = S_n - S_{n-1}$

ونترك تفصيلاته تمريناً للقارىء.

مثال ٤:

بين أن $\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n$ تباعدية.

الحل:

نفرض أن $z_n = (1-i)^n$ وبالاستفادة من الشكل القطبي للعدد المركب:

$$z_n = (\sqrt{2})^n e^{n\theta i}, \quad \theta = \arg(1 - i)$$
$$= (\sqrt{2})^n \cos n\theta + i(\sqrt{2})^n \sin n\theta$$

وبما أن كلاً من المتتاليتين الحقيقيتين $((\sqrt{2})^n \sin n\theta)$

و $((\sqrt{2})^n \sin n\theta)$ تباعدية فإن:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^2 \sin n\theta \neq 0, \quad \lim (\sqrt{2})^n \cos n\theta \neq 0$$

(في الواقع هذه النهايات غير موجودة وبالتالي كـل منها لا يسـاوي صفراً) وهـذا يفيدنا بأن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (1 - i)^n \neq 0$$

وبتطبيق النظرية السابقة فإن $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - i)^n$ تباعدية.

مثـال ٥:

أ - جد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + i)^n}{2^n}$

ب - بين ما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أو تباعدية؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1 + i)^n}$$

الحـل:

في الفرع أ نلاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + i)^n}{2^n}$

هندسية وذلك بفرض أن $z = \frac{1}{2}(1 + i)$ حيث

$$|z| = \frac{1}{2}|1 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

وبالاستفادة من مثال ١ فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)}$$

$$= \frac{2}{1-i} = (1+i)$$

أما الفرع (ب) فبالاستفادة من اختبار النسبة نستنتج أن:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!\,(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}\,.\,n!} = \frac{n+1}{1+i}$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} (n+1) > 1$$

وهذا يؤكد أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$ تباعدية

ولإتمام الفائدة نورد بعض الشروط الضرورية والكافية لكون المتتالية أو المتسلسلة تقاربية. وهذه الشروط تسمى شروط كوشي ونذكرها بدون برهان.

نظرية ٦:

بفرض أن (z_n) متتالية من الأعداد المركبة فإنها تكون تقاربية إذا وإذا فقط تحقق الشرط

لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N بحيث إن

$$(٧ - ٥) \; \ldots . \quad n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$$

أيّ متتالية تحقق الشرط (٥ ـ ٧) تسمى متتالية كوشي.

نظرية ٧:

بفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متسلسلة من الأعداد المركبة فإنها تكون تقاربية إذا وإذا فقط تحقق الشرط

لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N بحيث إن:

$$n, m > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| < \epsilon \quad \ldots\ldots (٥ - ٨)$$

أيّ متسلسلة تحقق الشرط (٥ ـ ٨) تسمى متسلسلة كوشي.

وأخيراً نعرض لنوعين هامين من التقارب:

تعريف ٢:

يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية تقارباً مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ تقاربية، يمكن ملاحظة أن:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |z_k| \quad \ldots\ldots (٥ - ٩)$$

فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية تقارباً مطلقاً فإن $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ تقاربية وبالتالي فإن نظرية ٧ تؤكد أن $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ تحقق شرط كوشي. وبالاستفادة من (٥ ـ ٩) فإن $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تحقق شرط كوشي (٥ ـ ٨) وبالتالي تكون تقاربية وبهذا نكون قد أثبتنا الحقيقة التالية:

نظرية ٨:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ تقاربية تقارباً مطلقاً فإنها تكون تقاربية.

إذا فرضنا ان عناصر المتتالية تتكون من دوال $f_n(z)$ بدلاً من الأعداد

المركبة فإننا نحصل على متتالية الدوال (f_n) وكذلك على متسلسلة الدوال $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ فعندئذ يوجد نوعان من التقارب الأول يعتمد على قيمة z ويسمى التقارب الموضعي والآخر التقارب المنتظم وسنورد تعريف كل منهما فيما يلي:

تعريف ٣:

نفرض أن (f_n) متتالية من الدوال لها المجال المشترك D. نقول إن المتتالية (f_n) تتقارب تقارباً موضعياً عند النقطة z في المجال D للدالة f إذا تحقق الشرط:

لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N (يعتمد على z, ϵ) بحيث:

$$n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \ldots \quad (٥ - ١٠)$$

ونقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تقاربية تقارباً موضعياً من الدالة f إذا كانت المتتالية $S_n(z)$ تقاربية تقارباً موضعياً من الدالة f حيث إن

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

وللتحقق من التقارب الموضعي للمتسلسلات الدالية نطبق أحد اختبارات التقارب المعروفة بعد تثبيت قيمة z.

تعريف ٤:

نقول إن المتتالية (f_n) تقاربية تقارباً منتظماً على المجال المشترك D للدالة f إذا تحقق الشرط التالي: لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N (يعتمد فقط على ϵ) بحيث:

$$n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ١١)$$

لكل z في D. ونقول كذلك إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تقاربية تقارباً منتظماً على

المجال المشترك D إذا كانت المتتالية (S_n) تقاربية تقارباً منتظماً على D.

النظرية التالية تمثل اختباراً للتقارب المنتظم.

نظرية ٩: (اختبار ڤيرشتراس):

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متسلسلة دوال وكانت (M_n) متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث إن $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ تقاربية فإذا تحقق الشرط:

$$|f_n(z)| \leqslant M_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \quad \ldots. \quad (٥ - ١٢)$$

لكل z في المجال المشترك D فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تكون تقاربية تقارباً منتظماً.

مثـال ٦:

نفرض أن الدالة f_n معرفة بالمساواة:

$$f_n(z) = z^n$$

أثبت ما يلي:

أ - المتتالية (f_n) تقاربية تقارباً موضعياً على كل نقطة في المستوي تحقق الشرط $|z| < 1$.

ب - المتتالية (f_n) تقاربية تقارباً منتظماً على المجال D حيث إن:

$$D = \{z : |z| \leqslant R < 1\}$$

جـ - المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تقاربية تقارباً موضعياً عند كل z بحيث إن $|z| < 1$.

د - المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ تقاربية تقارباً منتظماً على المجال D حيث:

$$D = \{z : |z| \leqslant R < 1\}$$

الحـــل:

أ - نثبِّت العدد المركب z الذي يحقق $|z| = r < 1$ وبالتالي فإن:

$$|z^n| = |z|^n < \epsilon$$

ومن ذلك ينتج أن: $n \ln |z| < \ln \epsilon$

وبما أن $|z| = r < 1$ فإن $\ln |z|$ سالب وبالتالي فإن:

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$$

فتكون قيمة N تحقق:

$$N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} \right]$$

لاحظ أن قيمـة N تعتمد عـلى قيمة ϵ وكـذلك عـلى قيمة z وهـذا يثبت أن:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$$

مـوضعياً لكـل z تحقق الشرط $|z| < 1$ حيث إن $f(z) = 0$ لكل z في ذلك المجال.

ب - لاثبات التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) لاحظ أن

$$|z^n| \leqslant R^n < \epsilon$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln R}$$

وبفرض أن:

$$N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln R} \right]$$

فـإن قيمـة N لا تعتمـد عـلى المـوضـع z وبـالتـالي فـإن التقـارب $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ منتظم على المجال D:

$$D = \{z : |z| \leqslant R < 1\}$$

جـ - بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ هندسية فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = f(z)$$

حيث إن $f(z) = \frac{1}{1-z}$ لكـل z في المجـال $D = \{z : |z| < 1\}$

وبالبحث عن متتالية المجاميع الجزئية (S_n) نجد أن:

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

وبالتالي نحصل على:

$$|S_n(z) - f(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{1 - z} \right| < \frac{|z|^n}{\left| \frac{1-z}{z} \right|} < \epsilon$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$n \ln |z| < \ln \epsilon + \ln \left| \frac{1-z}{z} \right|$$

وبالتالي فإن:

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + \frac{\ln \left| \frac{1-z}{z} \right|}{\ln |z|}$$

وبفرض أن N تأخذ القيمة

$$N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + \frac{\ln |1 - z|}{\ln |z|} - 1 \right]$$

فإن N تعتمد على قيمة ϵ وكذلك z فيكون التقارب موضعياً.

د ـ إذا فرض أن $|z| \leqslant R < 1$ فإن:

$$|S_n(z) - f(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} < \frac{R^{n+1}}{1 - R} < \epsilon$$

وبالتالي فإن:

$$(n + 1) \ln R < \ln \epsilon + \ln (1 - R)$$

ومن ذلك فإن:

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln R} + \frac{\ln (1 - R)}{\ln R} - 1$$

ويفرض أن N تأخذ القيمة

$$N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln R} + \frac{\ln (1 - R)}{\ln R} - 1 \right]$$

فإن N تعتمد فقط على ϵ وبالتالي يكون التقارب منتظماً على المجال:

$$D = \{z : |z| \leqslant R < 1\}$$

مثـــال ٧:

بين أن التقارب للمتسلسلات التالية منتظماً.

أ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n |z|}{n^2}$ لكل عدد مركب z.

ب ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ لكل z تحقق $|z| \leqslant 4$،

الحـــل:

بتطبيق نظرية اختبار ڤيرشتراس نلاحظ أن:

$$\left| \frac{\cos n |z|}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} = M_n$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n |z|}{n^2}$

تقاربية تقارباً منتظماً.

وبما أن $|z| \leqslant 4$ فإن:

$$\left| \frac{2^n z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{8^n}{n!} = M_n$$

وللتحقق من أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ تقاربية نستعين باختبار النسبة لنستنتج أن:

$$\frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{8^n} = \frac{8}{n+1}$$

وهذا يقترب من الصفر إذا اقتربت n من اللانهائية وبالتالي فإن:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ تقاربية وكذلك تكون $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ تقاربية تقاربـاً منتظماً لكـل z تحقق $|z| \leqslant 4$.

تمارين ٥ ـ ١

١ ـ أ ـ برهن أنه إذا وجدت نهاية المتتالية فإنها تكون واحدة ووحيدة.

ب ـ برهن أنه إذا كانت $S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$

فإن $\bar{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n$

جـ ـ إذا كانت $T = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ كذلك فإن:

$$S + T = \sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$$

٢ ـ جد ما إذا كانت المتتاليات التالية تقاربية أم لا ثم جد نهايتها إذا كانت تقاربية.

أ ـ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3}\, i\right)^n$

ب ـ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n + i^n}{n}$

جـ ـ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n!\, i}{2^n}$

د ـ $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(1-ni)}{n^2}$

٣ ـ بيِّن ما إذا كانت المتسلسلات التالية تقاربية أم لا ثم جد مجموعها إذا كانت تقاربية

أ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+3i)^n}{n!}$

ب ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, i^n}{2n+1}$

جـ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n}$

د ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2-i}\right)^2$

هـ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{3}\right)^2$

و ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(1-i)^n}$

٤ - بيِّن لماذا تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$$

تباعدية. ماذا نقول حول المتسلسلة التالية ولماذا؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$$

٥ - بتطبيق اختبار ڤيراشتراس بيِّن أن المتسلسلات التالية تقاربية تقارباً منتظماً

أ - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ ، $|z| \leqslant 1,$

ب - $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ، $|z| \leqslant 2,$

جـ - $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z|+n^2}$ لكل $z \neq 0$

د - $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\,|z|}{2^n}$ ولكل عدد مركب z.

٦ - برهن نظرية ٩ بالاستفادة من اختبار المقارنة وشرط كوشي لتقارب المتسلسلات.

٧ - إبحث في العلاقة بين التقارب المنتظم والتقارب الموضعي (بين أنه إذا كانت متسلسلة (متتالية) تتقارب تقارباً منتظماً فإنها تكون تقاربية تقارباً موضعياً).

٨ - إبحث في العلاقة بين التقارب المنتظم والتقارب المطلق. بيِّن ليس هناك علاقة ما كما يلي:

أ - بيِّن أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

تتقارب تقارباً منتظماً ولكنها لا تتقارب تقارباً مطلقاً (حيث x متغير حقيقي)

ب ـ بين أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

تتقارب تقارباً مطلقاً للدالة $f(x) = 1 + x^2$ وفي الفترة $0 \leqslant x \leqslant 1$ ولكنها لا تتقارب تقارباً منتظماً.

٩ ـ بين أن المتتالية

$$f_n(z) = \frac{nz}{n+1} + \frac{2}{n}, n = 1, 2, \ldots$$

تتقارب تقارباً منتظماً للدالة $f(z) = z$ على المجال

$$D = \{z : |z| \leqslant R\}$$

١٠ ـ إذا كانت المتتالية (z_n) تحقق الشرط

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} |z_{n+1} - z_n|, n = 0, 1, 2, \ldots$$

برهن أن (z_n) تحقق شرط كوشي وبالتالي تكون تقاربية.

٥ ـ ٢ متسلسلات القوى: Power Series

تبين لنا من المثال ٦ أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ لها خصائص هامة مثل أنها تقاربية عند كل z تحقق $|z| < 1$ بل انها تقاربية تقارباً منتظماً على كل مجال D حيث إن $D = \{ z : |z| \leq R < 1\}$ وعند ذلك يكون مجموع هذه المتسلسلة هو الدالة

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

أي أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

لكل z تحقق $|z| < 1$.

هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة قوى وبشكل عام فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ١٣)$$

تسمى متسلسلة قوى حيث إن (α_n) متتالية من الاعداد المركبة، والسؤال الذي يفرض نفسه هنا هو ما هي خصائص هذه المتسلسلة من حيث كونها تقاربية أم لا وإمكانية تمثيلها بدالة ما على مجال معين.

النظرية التالية تبين الخصائص التقاربية لمتسلسلة القوى (٥ ـ ١٣).

نظرية ١٠:

لأي متسلسلة قوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

يوجد عدد حقيقي $R \geq 0$ بحيث إن

أ ـ المتسلسلة تقاربية لكل z تحقق: $|z - z_0| < R$

ب ـ المتسلسلة تباعدية لكل z تحقق $|z - z_0| > R$

يسمى العدد الحقيقي R نصف قطر التقارب ويسمى القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره R مجال التقارب. وإذا كان $R = 0$ فإن المتسلسلة تقاربية فقط عندما تكون $z = z_0$ وإذا كان $R \to \infty$ فإن المتسلسلة تقاربية لكل الأعداد المركبة z. أما الحالات عندما تكون z على محيط الدائرة $|z - z_0| = R$ فإنها تعالج على انفراد باستخدام اختبارات التقارب. ويمكن إيجاد نصف قطر التقارب بإحدى الطرق التالية:

أ - $R = \frac{1}{L}$ حيث إن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \quad \ldots\ldots (٥ - ١٤)$$

إن وجدت النهاية.

ب - $R = \frac{1}{L}$ حيث إن:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \quad \ldots\ldots (٥ - ١٥)$$

إن وجد النهاية.

جـ - $R = \frac{1}{L}$ حيث إن:

$$L = \limsup_{n} \sqrt[n]{|\alpha_n|} \quad \ldots\ldots (٥ - ١٦)$$

وهذه النهاية موجودة دائماً.

البرهان:

نثبت الفرع (أ) ونترك إثبات الفرعين الآخرين تمريناً للقارىء. ولذلك نفرض أن z تحقق $|z - z_0| \leqslant r < R$ وبالتالي فإن النسبة بين أي حدين متتاليين هي:

$$\left| \frac{\alpha_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{\alpha_n (z - z_0)^n} \right| = \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| |z - z_0|$$

وبإيجاد النهاية للطرفين نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{\alpha_n (z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|$$

$$= L |z - z_0|$$

وبتطبيق اختبار النسبة نستنتج أن المتسلسلة تقاربية إذا تحقق الشرط

$$L |z - z_0| < 1$$

ومن ذلك فإن:

$$|z - z_0| < \frac{1}{L}$$

وبفرض أن $L \neq 0$ نرمز بالرمز R للعدد $\frac{1}{L}$ لنجد أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كانت:

$$|z - z_0| < R$$

مثـال ٨:

جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z - i)^n}{n!}$$

بايجاد النسبة

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \frac{2^{n+1} . n!}{(n + 1)! 2^n}$$

$$= \frac{2}{n + 1}$$

ومن ذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n + 1} = 0$$

وبالتالي فإن هذه المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z التي تحقق

$$|z - i| < R = \frac{1}{L} = \infty$$

أي لجميع الاعداد المركبة.

مثـال ٩:

جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^n (z + i)^n}{n!}$$

الحـل:

بإيجاد النسبة

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \frac{(n + 1)^{n+1} \cdot n!}{(n + 1)!\, n^n}$$

$$= \left(\frac{n + 1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

وبايجاد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

نستنتج أن المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z التي تحقق:

$$|z + i| < R = e^{-1}$$

النظرية التالية تعتبر تعميماً لمثال ٦.

نظرية ١١:

نفرض أن R نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

فإنه يوجد دالة $f(z)$ بحيث إن:

أ ـ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تتقارب موضعياً للدالة f أي أن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ١٧)$$

لكل z تحقق $|z - z_0| < R$.

ب ـ يكون التقارب منتظماً على المجال

$$|z - z_0| \leq r < R \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ١٨)$$

جـ ـ المتسلسلة تباعدية على المجال

$$|z - z_0| > R$$

البرهـــان:

أ ـ بما أنه لكل z تحقق $|z - z_0| < R$ فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

تقاربية. نعرف الدالة f بالمساواة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

نترك للقارىء إثبات أن هذا التقارب تقارب موضعي.

ب ـ بما أن R نصف قطر التقارب فإن $L = \frac{1}{R}$ تحقق

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$$

وهذا يكافىء لكل $\epsilon > 0$ يوجد N تحقق

$$n > N \Rightarrow \left|L - \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right| < \epsilon$$

ومن ذلك فإن:

$$L - \epsilon < \sqrt[n]{|\alpha_n|} < L + \epsilon$$

وبفرض أن $|z - z_0| \leq r < R$ فإن $r L < RL = 1$ وبالتالي فإن:

$$L (R + r) = rL + RL < 2$$

وبفرض أن:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - L (R + r)}{(R + r)}$$

يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|\alpha_n|} < L + \epsilon$$

$$< L + \frac{2 - L (R + r)}{2 (R + r)}$$

$$< \frac{L (R + r) + 2}{R + r}$$

$$< \frac{2}{(R + r)}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$|\alpha_n| < \left(\frac{2}{R + r} \right)^n, \quad n > N$$

وهذا يبين لنا أن:

$$|\alpha_n (z - z_0)^n| < \left(\frac{2}{R + r} \right)^n r^n = \left(\frac{2r}{R + r} \right)^n, n > N$$

وهذا يبين أن:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n (z - z_0)^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2r}{R+r} \right)^n$$

وبما أن $r < R$ فإن $\frac{2r}{R+r} < 1$ وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2r}{R+r} \right)^n$ تقاربية. وبتطبيق نظرية ڤيرشتراس فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تقاربية تقارباً منتظماً على المجال $|z - z_0| \leq r < R$.

وهذا ينهي إثبات النظرية

النظرية التالية تبين أن تقارب متسلسلات القوى يتحدد بتقارب المتسلسلة موضعياً عند نقطة واحدة.

نظرية ١٢:

نفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تقاربية عند النقطة $z = w \neq z_0$ فإنها تكون تقاربية لجميع قيم z التي تحقق:

$$|z - z_0| < R$$

حيث إن

$$R = |w - z_0|$$

البرهان:

بما أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (w - z_0)^n$$

تقاربية فإن فرع (أ) من نظرية ٥ يؤكد أن:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n (w - z_0)^n = 0$$

وهذا يفيد بأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N يحقق:

$$n > N \Rightarrow |\alpha_n (w - z_0)^n| < \epsilon$$

وباعطاء ϵ القيمة 1 فإنه يوجد N بحيث إن:

$$n > N \Rightarrow |\alpha_n (w - z_0)^n| < 1$$

فإذا فرضنا أن K تحقق:

$$K = \max \{1, |\alpha_0|, |\alpha_1 (w - z_0)|, \ldots, |\alpha_N (w - z_0)^N|\}$$

فإن:

$$|\alpha_n (w - z_0)^n| < K, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

وبملاحظة أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \, |w - z_0|^n \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^n$$

ومعرفة الحقيقة

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{r}{R} = t < 1$$

فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n (z - z_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} K t^n$$

وبما أن المتسلسلة في الطرف الأيمن هندسية وتقاربية فإن اختبار المقارنة يؤكد أن المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

تقاربية كذلك لكل z تحقق $|z - z_0| \leq r < R$ حيث إن $R = |w - z_0|$.

وهذا ينهي إثبات النظرية.

لاحظ أن التقارب على $D = \{z : |z - z_0| \leq r < R\}$ منتظم.

إن التقارب المنتظم يعطي المتسلسلة خصائص هامة ومفيدة.

النظريات التالية تبيِّن أن المتسلسلة التي تكون تقاربية تقارباً منتظماً تكون قابلة للاشتقاق وقابلة للتكامل كذلك.

نظرية ١٣:

نفرض أن المتتالية (f_n) تتكون من دوال متصلة على المجال المشترك D وأنها تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على المجال D فإذا كان C كانتوراً يقع في المجال D فإن:

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz \quad \ldots\ldots (٥ - ١٩)$$

البرهــان:

إن التمـرين ٦ من تمارين ٥ ـ ٢ يؤكـد أن f متصلة عـلى المجـال D وبمـا أن التقارب منتظم فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب N يحقق:

$$n > N \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \epsilon / L$$

حيث إن L يمثل طول الكانتور C. وبالتالي فإن:

$$\left|\int_C f(z)\,dz - \int_C f_n(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z) - f_n(z)|\,|dz|$$

$$< \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \epsilon, n > N.$$

وهذا ينهي اثبات النظرية.

نظرية ١٤:

نفرض أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب تقاربـاً منتظماً للدالـة f على المجـال المشـترك D فإذا كـانت f_n تحليلية عـلى المجال المـترابط ترابـطاً بسيـطاً D فـإن f تحليلية على D.

البرهــان:

التمـرين (٦) من تمـارين ٥ ـ ٢ يؤكـد أن f متصلة عـلى المجـال D وبمـا أن التقارب منتظم فإن النظرية السابقة تؤكد أن:

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz$$

لكل كانتور مغلق وبسيط في D وبما أن f_n تحليلية على D فإن $\int_C f_n(z)\,dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط C، $n = 0, 1, 2, \ldots$ ومن ذلك فإن $\int_C f(z)\,dz = 0$ لكل كانتور مغلق وبسيط C في D وبتطبيق نظرية موريرا فإن f تحليلية على D.

نتيجة ١٥:

المتسلسلة $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تحليلية على كل نقطة في مجال التقارب وأن:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n (z - z_0)^{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (٥ - ٢٠)$$

البرهان:

طبق نظرية ١٤ على متتالية المجاميع الجزئية علماً بأن متسلسلة القوى تقاربية تقارباً منتظماً.

نتيجة ١٦:

المتسلسلة $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$

قابلة للتكامل في مجال تقاربها وان:

$$\int_0^z S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(t - z_0)^{n+1}}{n + 1} \Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n (z - z_0)^{n+1}}{n + 1}$$

البرهان:

طبق نظرية ١٣ على متتالية المجاميع الجزئية.

هذه الخصائص الجيدة لمتسلسلات القوى تفرض السؤال التالي، بما أن متسلسلة القوى تمثل دالة مركبة على مجال ما هو مجال التقارب فهل يمكن تمثيل أية دالة $f(z)$ على صيغة متسلسلة قوى على مجال ما؟

الأمثلة التالية تعطي اجابة جزئية لهذا السؤال.

مثال ١٠:

جد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة: $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$

الحــل:

بالاستفادة من المتسلسلة الهندسية:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \,,\ |t| < 1$$

فإن التعويض بالقيمة $-z^2$ بدلاً من t يعطي التمثيل المطلوب:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

حيث تكون هذه المتسلسلة تقاربية في المجال $|z^2| < 1$ أو أن $|z| < 1$.

مثــال ١١:

جد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

الحــل:

بإيجاد المشتقة للدالة $\frac{1}{1-t}$ فإن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

وهـذا يفيدنـا بأن تمثيـل الدالـة f بمتسلسلة قوى يتم بـإيجاد المشتقـة للمتسلسلة الهندسية $\frac{1}{1-t}$ كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}$$

وكذلك فإن مجال التقارب لهذه المتسلسلة هو $|z| < 1$.

مثـال ١٢ :

جد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة :

$$f(z) = \text{Log}\,(1 + z)$$

الحـل :

بملاحظة أن :

$$\text{Log}\ z = \int_0^z \frac{1}{1+t}\, dt$$

حيث إن $\text{Log}\,(1 + z)$ أحـد فـروع الـدالـة $\log\,(1 + z)$ الـذي يكـون تحليلياً على مجال يحتوي النقطتين $0, z$ وبالتالي فإن

$$\text{Log}\,(1 + z) = \int_0^z \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$$

وأن مجال تقاربها $|z| < 1$.

٥ ـ ٣ متسلسلات تايلور وماكلورين: (Taylor and Maclaurin)

نـلاحظ في البند السـابق أننا وظفنـا في الأمثلة معرفتنـا للمتسلسلة الهندسيـة وخصـائص قابليـة التكامـل وقابليـة الاشتقاق لمتسلسـلات القوى. ولكن كيف يمكن تمثيل دالة أخرى لا يصلح معها الأسلوب المتبع في هذه الأمثلة. ومـا هي الشروط التي تضمن إمكانية تمثيـل الدالـة بمتسلسلة قوى. هـذا ما تجيب عليـه النظريات التي تتبع التعريف التالي:

تعريف ٥:

نفرض أن الدالة f تحليلية على النقطة z_0 فإن المتسلسلة

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \quad \dots\dots (٥ - ٢١)$$

تسمى متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة z_0. وإذا كـانت $z_0 = 0$ فإن المتسلسلة تعرف بأنها متسلسلة ماكلورين للدالة f. النظرية التالية تسمى نـظرية تايلور (Taylor Theorem).

نظرية ١٧:

بفرض أن الدالة f تحليلية عـلى مجال يحتـوي القرص $|z - z_0| \leq R$ فـإن متسلسلة تايلور (٥ ـ ٢١) للدالة f حول النقطة z_0 تتقارب موضعيـاً للدالة f في القرص $|z-z_0| < R$ ويكون التقارب منتظماً على $|z - z_0| \leq r < R$.

البرهـــان:

بالاستفادة من تمرين ٧ من تمارين ٥ ـ ٢ فإن:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

ويمكن توظيف هذه المساواة للحصول على ما يلي:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\left\{\frac{1}{1-(z/s)}\right\}$$

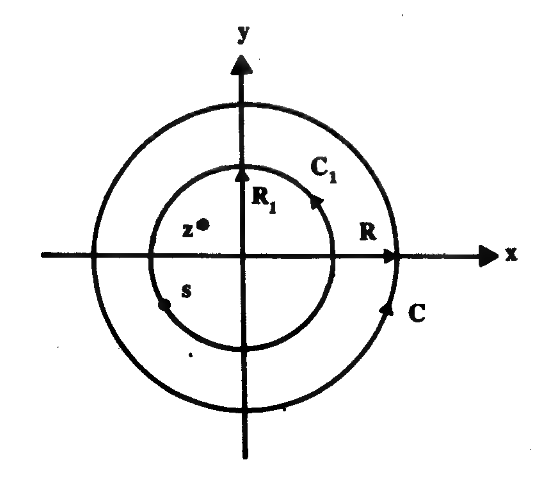
$$= \frac{1}{s}\left\{1 + \frac{z}{s} + \left(\frac{z}{s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{s}\right)^n + \frac{(z/s)^{n+1}}{1-(z/s)}\right\}$$

وبايجاد التكامل بالنسبة للمتغير s نجد أن:

$$\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \int_C \frac{f(s)}{s}\,ds + \int_C \frac{z\,f(s)}{s^2}\,ds + \ldots$$

$$+ \int_C \frac{z^n f(s)}{s^{n+1}}\,ds + \int_C \frac{z^{n+1} f(z)}{s^{n+1}(1-z/s)}\,ds$$

حيث إن C كـانتور مغلق وبسيط: $z\,, |s| < r$ تقـع داخـل هـذا الكـانتـور وبتطبيق نظرية كوشي للتكامل ونظرية كوشي للمشتقة نستنتج ما يلي:



شكل (١)

$$2\pi i\, f(z) = 2\pi i\, f(0) + 2\pi i \frac{f'(0)}{1!} z + 2\pi i \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots$$

$$+ 2\pi i \frac{f^n(0)}{n!} z^n + \int_{C_1} \frac{z^{n+1} f(s)}{s^{n+1}(1 - z/s)} ds.$$

وبالتالي ينتج أن:

$$(\text{٥ - ٢٢}) \dots . f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} z^n + I_n(z).$$

حيث:

$$I_n(z) = z^{n+1} \int_{C_1} \frac{f(s)\, ds}{s^{n+1}(1 - z/s)} = z^{n+1} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^n (s - z)} ds$$

وبالاستفادة من الفرض أن $|s| = R_1, |z| = r$ حيث إن $r < R_1$ فإن:

$$|s - z| \geqslant \big||s| - |z|\big| = R_1 - r$$

وبما أن $f(s)$ تحليلية فإنها تأخذ قيمة عظمى على احدى النقاط الحدودية للقرص $|s| \leqslant R_1$ وبالتالي فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K يحقق:

$$|f(s)| \leqslant K$$

ومن هذه المعلومات نستنتج أن:

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{r^{2+1} K\, 2\pi R_1}{R_1^n (R_1 - r)} = \frac{2\pi r R_1 K}{R_1 - r} \left(\frac{r}{R_1} \right)^n$$

وبما أن $\frac{r}{R_1} < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} I_n(z) = 0$

وبأخذ النهاية لطرفي المساواة (٥ ـ ٢٢) ينتج أن:

$$(\text{٥ - ٢٣}) \dots . \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

وهـذه تسمى متسلسلة تايلور عنـد $z = 0$ أو متسلسلة مـاكلورين للدالـة f.

وللحصول على (٥ ـ ٢١) نفرض أن z_0 نقطة اختيارية في المجال D ونفرض أن $w = z - z_0$ وأن

$$g(w) = f(w + z_0) = f(z)$$

فإذا كانت f تحليلية عند z_0 فـإن $g(w)$ تحليلية عنـد $w = 0$ وبالتـالي فإن الدالة g تمثل بالمتسلسلة (٥ ـ ٢٣) وبما أن

$$g(w) = f(z), g^n(0) = f^n(z_0)$$

فإن:

$$f(z) = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

وبتطبيق نظرية ١١ نحصل على التقارب المنتظم. وهذا ينهي اثبات النظرية.

مثـال ١٣:

مثّل الدوال التالية بمتسلسلة قوى عند $z = 0$.

أ ـ $f(z) = e^z$

ب ـ $f(z) = \sin z$

جـ ـ $f(z) = \cos z$

الحـل:

أ ـ بالاشتقاق المتكرر للدالة e^z فإن: $f^n(0) = 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

ومن ذلك فإن:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \ldots\ldots \quad (٥ ـ ٢٤)$$

ب ـ بالاشتقاق المتكرر للدالة $\sin z$ فإن:

$$\sin^{n} 0 = \begin{cases} 0 & , \quad n = 4k \\ 1 & , \quad n = 4k + 1 \\ 0 & , \quad n = 4k + 2 \\ -1 & , \quad n = 4k + 3 \end{cases}$$

ومن ذلك فإن:

$$(٥ - ٢٥) \; .... \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...$$

جـ ـ وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(٥ - ٢٦) \; ... \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...$$

وبما أن متسلسلة تايلور متسلسلة قوى فإنها تكتسب كل خصائص متسلسلات القوى التي سبق ذكرها من كونها قابلة للاشتقاق حداً حدا وكذلك قابلة للتكامل حدا حدا. وتخضع لقانون جمع الدوال والضرب العددي للدالة. ولكن ضرب متسلسلتين ببعضهما البعض يختلف قليلاً وهو معرف فيما يلي:

تعريف ٦:

بفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$

متسلسلتا قوى فإن حاصل ضربهما متسلسلة قوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z - z_0)^n$$

تسمى حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين حيث إن:

$$(٥ - ٢٧) \; .... \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n-k} \beta_k$$

النظرية التالية تبين أن المتسلسلة التي تمثل حاصل ضرب دالتين تحليليتين على مجال مشترك لهما هو حاصل ضرب كوشي لمتسلسلتي تايلور للدالتين.

نظرية ١٨ :

إذا كانت f و g تحليليتين على المجال المشترك D وكانت

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ متسلسلة تايلور للدالة f حول z_0 وكذلك

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n$ متسلسلة تايلور للدالة g حول z_0 فإن متسلسلة

تايلور للدالة f . g حول z_0 هي $f \, . \, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z - z_0)^n$

حيث إن γ_n معرفة بالمساواة (٥ ـ ٢٧).

البرهــان:

حسب نظرية تايلور (نظرية ١٧) فإن:

$$\alpha_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \quad , \beta_n = \frac{g^n(z_0)}{n!}$$

والمطلوب إثبات أن:

$$(٥ - ٢٨) \; \ldots \quad \gamma_n = \frac{(f\, g)^n \, (z_0)}{n!}$$

يمكن بالاشتقاق المتكرر والاستقراء الرياضي إثبات أن:

$$(٥ - ٢٩) \; \ldots\ldots \quad (f.\, g)^n(z_0) = \sum_{k=0}^{n} n! \; \frac{f^{n-k}(z_0)\, g^k(z_0)}{(n-k)!\, k!}$$

وهذه تسمى صيغة ليبنتز (انظر تمرين ٨ من تمارين ٥ ـ ٢).

وبإيجاد حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين فإن:

$$(٥ - ٣٠) \; \ldots\ldots \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \cdot \alpha_{n+k}\, \beta_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{n-k}(z_0)}{(n-k)!} \cdot \frac{g^k(z_0)}{k!}$$

وبالمقارنة بين (٥ ـ ٢٩) و(٥ ـ ٣٠) نستنتج (٥ ـ ٢٨) وهذا ينهي اثبات النظرية.

نلاحظ أنه يوجد للدالة التحليلية حول كل نقطة في مجالها تمثيلاً بتسلسلة تايلور فهل هذا التمثيل وحيد عند النقطة الواحدة؟ هذا ما تجيب عليه النظرية التالية:

نظرية ١٩:

إذا كانت الدالة f تحليلية، وممثلة بالمتسلسلة

$$(٣١ - ٥) \;\ldots\ldots\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n,$$

لكل z تحقق $|z - z_0| < R$ فإن:

$$(٣٢ - ٥) \;\ldots\; \alpha_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \;, n = 0, 1, 2, \ldots$$

البرهان:

بتعويض z_0 بدلاً من z في (٥ ـ ٣١) ينتج أن $f(z_0) = \alpha_0$

وبما أن متسلسلة القوى قابلة للاشتقاق حداً حداً فإن الاشتقاق المتكرر ينتج لنا:

$$(٣٣ - ٥) \;\ldots\; f^n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n n! \quad \frac{(n + k)!}{k!} (z - z_0)^k$$

وبالتعويض في (٥ ـ ٣٣) بدلاً من z القيمة z_0 ينتج أن:

$$(٣٤ - ٥) \;\ldots\ldots\; f^n(z_0) = \alpha_n n!$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

والاستقراء الرياضي ينهي برهان (٥ ـ ٣٢). وهذا يفيد بأن المتسلسلة

(٥ ـ ٣١) يجب أن تكون متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة z_0 ويكون التمثيل عندها بالتالي وحيداً.

مثال ١٤:

جد دالة تحليلية عند $z = 0$ تحقق الشرط $f'(z) = -2i\,f(z)$ وتأخذ القيمة 1 عند $z = 0$.

الحل:

بما أن الدالة تحليلية عند $z = 0$ فإنه يوجد لها تمثيل بمتسلسلة ماكلورين وبالتالي فإن $f(0) = 1$ وكذلك: $f'(0) = -2i\,f(0) = -2i$

وبتكرار الاشتقاق ينتج أن:

$$f''(z) = -2i\,f'(z) = (-2i)^2 f(z),$$
$$f'''(z) = -2i\,f''(z) = (-2i)^3 f(z), \ldots$$

وهكذا فإن:

$$f^{n}(0) = (-2i)^n f(0) = (-2i)^n$$

ومن ذلك فإن الدالة هي:

$$f(z) = 1 - 2iz + \frac{(2i)^2}{2!} z^2 - \frac{(2i)^3}{3!} z^3 + \ldots \quad \ldots. \quad (٥ - ٣٥)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{n!} z^n.$$

فإذا لاحظنا فرع أ من مثال ١٣ والذي يبين أن: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

فإذا عوضنا $-2iz$ بدلاً من z ينتج لدينا:

$$e^{-2iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{n!} z^n \quad \ldots. \quad (٥ - ٣٦)$$

وبالمقارنة بين (٥ ـ ٣٥) و(٥ ـ ٣٦) نستنتج أن: $f(z) = e^{-2iz}$ هي الدالة التي تحقق المطلوب.

مثـــال ١٥:

نفـرض أن $f(t)$ دالة مـركبة القيمـة معرفـة على الفـترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ فإذا عرفنا الدالة المركبة $g(z)$ بالمساواة التالية:

$$g(z) = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin zt \, dt \quad \ldots\ldots (٥ - ٣٧)$$

برهن أن الدالة g كلية وجد تمثيلاً لها بمتسلسلة تايلور حول $z = 0$.

الحـــل:

يمكن ايجاد تمثيلاً للدالة $\sin zt$ بمتسلسلة ماكلورين. بـالاستفادة من فـرع ب من مثال ١٣ نستنتج أن:

$$\text{Sin } zt = zt - \frac{(zt)^3}{3!} + \frac{(zt)^5}{5!} - \frac{(zt)^7}{7!} + \ldots$$

وبالتالي فإن:

$$f(t) \sin zt = zt\, f(t) - \frac{z^3}{3!} t^3 f(t) + \frac{z^5}{5!} t^5 f(t) - \frac{z^7}{7!} t^7 f(t) + \ldots$$

وبالتكامل على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ نستنتج أن:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^{\pi/2} f(t) \sin zt \, dt \quad \ldots\ldots (٥ - ٣٨) \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} t\, f(t)\, dt\right) z - \left(\frac{1}{3!} \int_0^{\pi/2} t^3 f(t)\, dt\right) z^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{5!} \int_0^{\pi/2} t^5 f(t)\, dt\right) z^5 - \ldots \end{aligned}$$

وبما أن التكاملات لا تعتمد على المتغير z وتعتمـد فقط على رتبـة الحد، فـإن الطرف الأيمن للمساواة (٥ ـ ٣٨) متسلسلة ماكلورين للدالة g وهي بالتالي دالة تحليلية لجميع قيم z فتكون بالتالي كلية.

تمارين (٥ ـ ٢، ٥ ـ ٣)

١ ـ برهن فرع ب من النظرية ١٠.

٢ ـ برهن فرع جـ من النظرية ١٠.

٣ ـ برهن فرع جـ من النظرية ١١ بأسلوب التناقض.

٤ ـ برهن أن التقارب في فرع أ من نظرية ١١ تقارب موضعي.

٥ ـ إذا فرض أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تباعدية عند النقطة $z = w \neq z_0$ فإنها تكون تباعدية لكل قيم z التي تحقق $|z - z_0| > R$ حيث $R = |w - z_0|$.

اقتراح: بأسلوب التناقض ثم طبق نظرية ١٢.

٦ ـ بفرض أن (f_n) متتالية من الدوال المتصلة على المجال المشترك D وإن (f_n) تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على D فبرهن أن الدالة f متصلة على المجال D.

٧ ـ برهن المتطابقة التالية:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}, t \neq 1$$

اقتراح: استعن بالقسمة الطويلة.

٨ ـ لأي دالتين تحليليتين f و g برهن صيغة ليبنتز لمشتقة حاصل الضرب $f \cdot g$ وهي:

$$(f \cdot g)^n (z_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} f^{n-k}(z_0)\, g^k(z_0)$$

٩ ـ جد نصف قطر التقارب لكل من المتسلسلات التالية:

أ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-2)^n$ ب ـ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

جـ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-i)^n$ د ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} (z+i)^n$

هـ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(1+i)^n}$ و ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{2n+1} \right)^n z^n$

ز ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n} (z-i)^n$ ح ـ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z+3i)^n$

١٠ ـ مثل الدوال التالية بمتسلسلة قوى:

أ ـ $f(z) = \tan^{-1} z$

ب ـ $f(z) = \sin h\, z$

جـ ـ $f(z) = \cos z^2$

د ـ $f(z) = e^{2iz}$

هـ ـ $f(z) = z^3 \sin 2z$

١١ ـ جد متسلسلة تايلور للدوال التالية حول النقطة المذكورة

أ ـ $f(z) = \sin z \quad , \quad z_0 = \pi / 2$

ب ـ $f(z) = \cos z \quad , \quad z_0 = \pi / 3$

جـ ـ $f(z) = e^z \quad , \quad z_0 = i$

د ـ $f(z) = \cos h\, z \quad , \quad z_0 = -i$

هـ ـ $f(z) = z^4 \quad , \quad z_0 = 2i$

١٢ ـ جد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$

بثلاث طرق مختلفة.

١٣ ـ بين أن الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z - 1}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

تحليلية عند $z = 0$ وبالتالي تكون كلية.

١٤ ـ جد دالة تحليلية عند $z_0 = 0$ تحقق $f'(z) = if(z)$ لكل z وتأخذ القيمة 1 عند $z = 0$.

١٥ ـ بفرض أن الدالة $f(t)$ دالة مركبة القيمة ومتصلة على الفترة $[0, 1]$ فبرهن أن الدالة:

$$g(z) = \int_0^1 f(t)\, e^{zt}\, dt$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة z وبالتالي تكون كلية ثم جد متسلسلة ماكلورين لها.

١٦ ـ أ ـ جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = e^{zi}$

ب ـ جد متسلسلة ماكلورين للدالة $g(z) = \cos z + i \sin z$

جـ ـ قارن بين الدالتين. ماذا تستنتج ولماذا؟

١٧ ـ جد تمثيلاً بمتسلسلة قوى للدالة:

$$f(z) = \sec z$$

بطريقتين مختلفتين.

١٨ ـ كرر التمرين السابق للدالة

$$f(z) = \tan z$$

اقتراح: الطريقة الأولى باستخدام حاصل ضرب كوشي للمتسلسلات وفيه يعرف قسمة المتسلسلات والطريقة الثانية باستخدام نظرية تايلور.

١٩ ـ بفرض أن الدالة $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ كلية.

أ ـ جد تمثيلاً للدالة $\overline{f(z)}$ بمتسلسلة قوى للمتغير $\bar{z}$.

ب ـ بين أن الدالة $\overline{f(\bar{z})}$ كلية

٢٠ ـ بفرض أن الدالة f تمثل بالمتسلسلة التالية:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

حيث إن $n \geqslant 2, \alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}, \alpha_0 = \alpha_1 = 1$

أ ـ برهن أن f تحقق المعادلة:

$$f(z) = 1 + z\, f(z) + z^2 f(z)$$

ب ـ ومن ذلك استنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

٢١ ـ بفرض أن الدالة f تحليلية عند $z = 0$ وتحقق الشرط:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

برهن أنه يوجد دالة g تحليلية عند $z = 0$ وتحقق الشرط

$$f(z) = z^2 g(z)$$

لكل z.

٢٢ ـ بفرض أن الدالة f كلية وتحقق الشرط

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

وان

$$f''(z) + f(z) = 0$$

جـد تمثيلاً لهـذه الدالـة بمتسلسلة قوى عنـد $z = 0$. هل تستـطيع

التعرف على هذه الدالـة؟ قارن بـين هذه المتسلسلة التي حصلت عليهـا وبين متسلسلة الدالة $\sin z$ عند $z = 0$.

٢٣ ـ إذا كانت f دالة تحليلية تحقق المعادلة

$$f(z) = z + f(z^2)$$

فما هي الدالة f؟

اقتراح: جد f على صورة متسلسلة قوى عند $z = 0$ مثلاً.

٢٤ ـ بيِّن أنه يمكن تمثيل الدالة

$$f(z) = (1 + z)^\alpha$$
$$= e^{\alpha \cdot \operatorname{Log}(1+z)}$$

بالمتسلسلة التالية:

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots$$

ويكون تقاربها موضعياً على المجال $|z| < 1$.

٢٥ ـ بيِّن أن الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{zi} - 1}{z} & , z \neq 0 \\ i & , z = 0 \end{cases}$$

تحليلية على كل الأعداد المركبة وبالتالي تكون كلية.

٢٦ ـ إذا كانت الدالة f تحليلية عند z_0 وكانت $f(z_0) = 0$ فبين أن:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

٥ ـ ٤ متسلسلات لورانت

تبين لنا أنه يمكن تمثيل أي دالة تحليلية حول نقطة z_0 بمتسلسلة قوى تسمى متسلسلة تايلور ولكن ماذا يحدث إذا كانت النقطة z_0 نقطة متفردة للدالة f أي لو كانت f ليست تحليلية عند النقـطة z_0 ؟ هل يمكن تمثيلهـا بمتسلسلة قوى؟. المثـال التالي يبـين أنه يمكن تمثيـل تلك الـدالـة بمتسلسلة ولكن ليست متسلسلة تايلور حيث تكون قوى المتغير $(z - z_0)$ سالبة وليست موجبة بالضرورة.

مثـال ١٦ :

مثّل الدالة $e^{1/z}$ على صيغة متسلسلة قوى إذا كانت $|z| > 1$.

الحـل :

نـلاحظ أن الـدالـة ليست تحليليـة عنـد $z = 0$ وفي المجـال المـذكـور $1 < |z|$ تكـون تحليلية ويمكن أن نستنتـج أن $\frac{1}{|z|} < 1$ وبالتـالي يمكن ايجـاد متسلسلة بتعـويض $1 / z$ بـدلاً من z في متسلسلة تـايلور للدالـة e^z حيث :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

لينتج أن :

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \ldots$$

لاحظ أن قوى المتغير z سالبة وليست موجبة وبـالتالي فـإن هذه المتسلسلة ليست متسلسلة تايلور حول $z = 0$.

فإذا سمحنا للقوى في متسلسلة القوى أن تكون سالبة فإن الجواب للسؤال المذكور أعلاه بالإيجاب ولكن قطعاً بالنفي إذا اقتصرنا على متسلسلة تايلور (أي القوى الموجبة فقط). وبشكل عام فإن أي دالة f (سواء كانت تحليلية أم غير ذلك عند نقطة معينة) يمكن أن تمثل بمتسلسلة يظهر فيها قوى موجبة أو سالبة أو كلاهما معاً وهذه النتيجة تسمى نظرية لورانت وتسمى المتسلسلة متسلسلة لورانت (Laurent).

نظرية ٢٠: (نظرية لورانت)

بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال الحلقي $R > |z - z_0| > r$ فإن الدالة f يمكن تمثيلها بالمتسلسلة التالية على هذا المجال:

$$(٥ - ٣٩) \ldots\ldots \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

أي أن هاتين المتسلسلتين تتقاربان للدالة f على ذلك المجال ويكون التقارب منتظماً على المجال الحلقي المغلق.

$$(٥ - ٤٠) \ldots\ldots \quad r < r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1 < R$$

حيث إن المعاملات α_n تحقق المساواة:

$$(٥ - ٤١) \ldots\ldots \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, ds, \; n = 0, \mp 1, \ldots$$

حيث إن المسار C يمثل كانتوراً مغلقاً وبسيطاً موجب الاتجاه يقع في المجال الحلقي بحيث تكون النقطة z_0 في المنطقة الداخلية لهذا الكانتور.

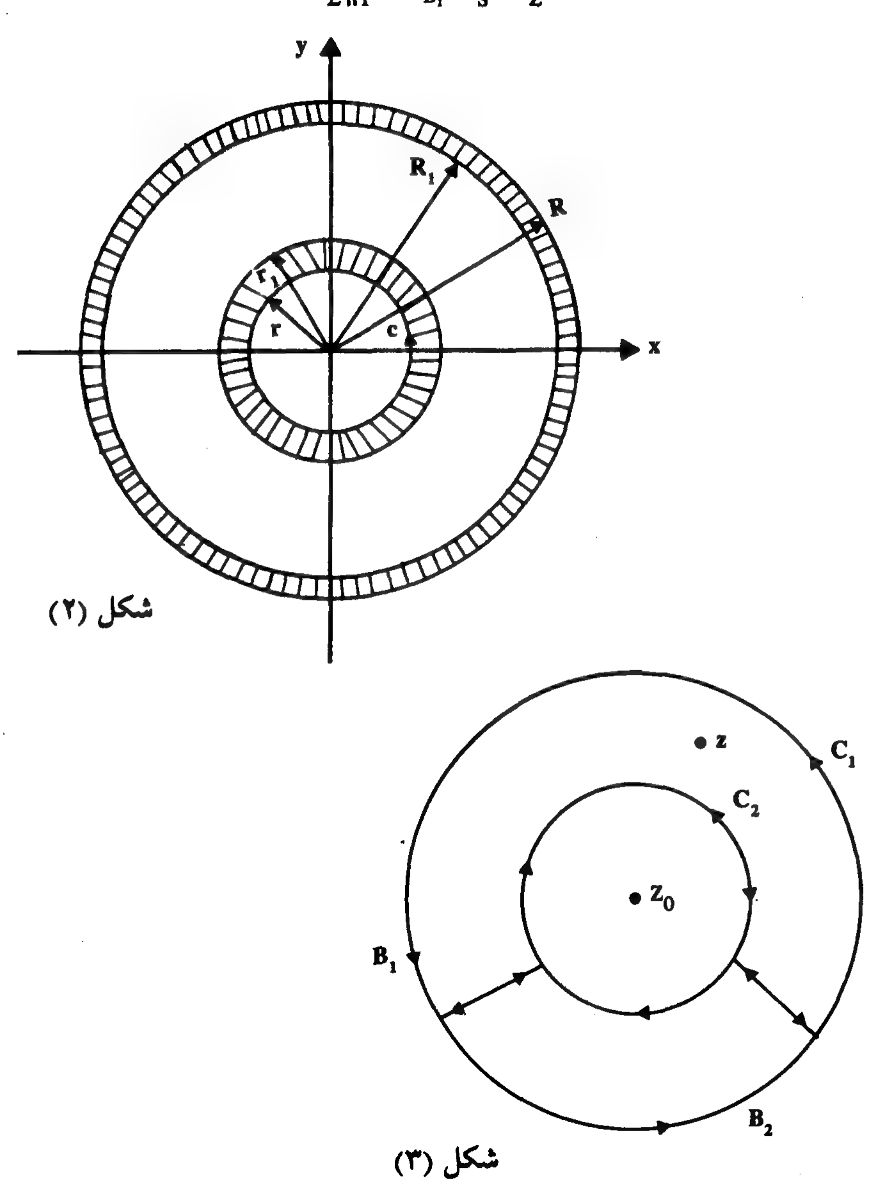
البرهان:

نفرض أن C_1 و C_2 مساران مغلقان وبسيطان موجبا الاتجاه يقعان في

المجـال الحلقي وأن النقطة z اختيـارية تقـع خارج C_2 وداخـل C_1. نفرض أن B_1, B_2 يمثلان المسارين الموصوفين في الشكلين (٢) و (٣).

فإن نظرية كوشي تؤكد أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1} \frac{f(s)}{s - z}\, ds, \quad \text{(٥ - ٤٢)} \ldots.$$



شكل (٢)

شكل (٣)

بينما نظرية كوشي ـ كورسات تؤكد أن

$$(٤٣ - ٥) \quad \dots \quad \int_{B_2} \frac{f(s)}{s - z}\, ds = 0$$

وبجمع (٥ ـ ٤٢) و (٥ ـ ٤٣) ينتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{B_1} \frac{f(s)}{s - z}\, ds + \int_{B_2} \frac{f(s)}{s - z}\, ds \right\}$$

وبما أن $B_1 + B_2 = C_1 - C_2$ فإن:

$$(٤٤ - ٥) \quad \dots \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 - C_2} \frac{f(s)}{s - z}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\, ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\, ds$$

ولايجاد تمثيل لهذه الدالة بمتسلسلة قوى نجد تمثيلاً للدالة $\frac{1}{s-z}$ بمتسلسلة قوى حول z_0 فإذا فرضنا أن s تقع على C_1 فإن $|s - z_0| > |z - z_0|$ وبالتالي فإن:

$$\left| \frac{z - z_0}{s - z_0} \right| < 1$$

ولهذا فإن:

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{(s - z_0) - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{(s-z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}\right)}$$

$$= (s - z_0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^n$$

أي أن :

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} \quad \ldots\ldots (٥ ـ ٤٥)$$

إذا كانت s على C_1.

أما إذا كانت s واقعة على C_2 فإن :

$$|z-z_0| > |s-z_0|$$

وبالتالي يكون :

$$\frac{|s-z_0|}{|z-z_0|} < 1$$

ولهذا فإن :

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= (z-z_0)^{-1} \frac{-1}{\left(1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{-1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\frac{1}{s-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \ldots\ldots (٥ ـ ٤٦)$$

وبتعويض (٥ ـ ٤٥) و(٥ ـ ٤٦) في (٥ ـ ٤٤) نحصل على ما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}\right) ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\right) ds$$

وبإعادة الترتيب نستنتج أن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds \right) (z - z_0)^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n}} ds \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$$

يمكن تبسيط ذلك إلى ما يلي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^{-n}$$

حيث:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds,$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}}$$

فإذا كانت C أي مسار مغلق وبسيط واقعاً بين C_1 و C_2 فإن إحدى نتائج نظرية كوشي ـ كورسات تبين أن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^{-n}$$

حيث إن:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds,$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} ds.$$

ويمكن كتابة ذلك بالصيغة التالية:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds,$$

$$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

النظرية التالية تبين أن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة f على مجال حلقي ما واحدة ووحيدة.

نظرية ٢١:

نفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ تقاربية في المجال $|z - z_0| < R$ وان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n}$ تقاربية في المجال $|z - z_0| > r$ حيث إن $r < R$ فإنه يوجد دالة f تحليلية على المجال الحلقي $r < |z - z_0| < R$ بحيث إن:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

وان:

$$\alpha_n = \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds, n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

يمكن الاستفادة من نظرية ١٩ لإثبات هذه النظرية لذلك نترك برهانها تمريناً للقارىء.

إن استخدام (٥ ـ ٤١) لإيجاد متسلسلة لورانت لدالة ما نادر لذلك وبما أن

المتسلسلة التي تمثل الدالة في مجال ما واحدة ووحيدة كما تؤكد ذلك النـظرية ٢١ فإنه يمكن ايجاد المتسلسلة بطرق شتى كما تبين الأمثلة التالية:

مثــال ١٧:

نفرض أن الدالة f معرفة بالمساواة $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)\,(z-2)}$

جد متسلسلة لورانت التي تمثل هذه الدالة في المجالات التالية:

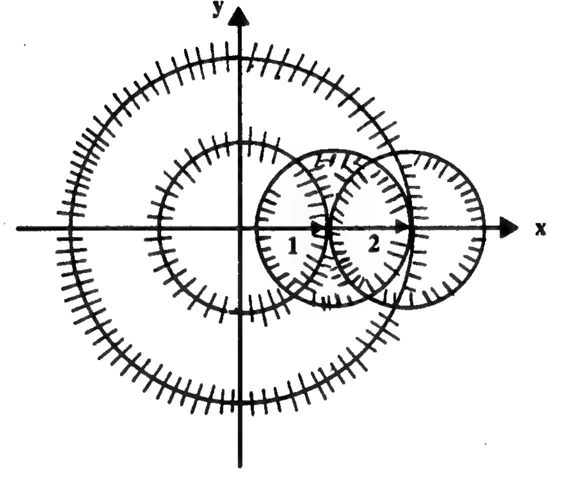
أ ـ $|z| < 1$

ب ـ $1 < |z| < 2$

جـ ـ $|z| > 2$

د ـ $|z - 1| < 1$

هـ ـ $|z - 2| < 1$



شكل (٤)

الحــل:

بتجزيء الكسر نحصل على ما يلي:

$$f(z) = \frac{-2}{1-z} + \frac{-2}{z-2}$$

أ ـ فإذا كانت $|z| < 1$ فإن $1 > \frac{1}{2} > \left|\frac{z}{2}\right|$ وبالتالي وبالاستفـادة من المتسلسلة الهندسية نحصل على ما يلي:

$$f(z) = -2\sum_{n=0}^{\infty} z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 + \frac{1}{2^n}\right) z^n$$

لاحظ أنه لا يوجـد قوى سـالبة للمتغـير z لأن الدالـة تحليلية عـلى هذا

المجال وبالتالي تكون المعاملات في الجزء الآخر من متسلسلة لورانت صفراً كي يختفي هذا الجزء من المتسلسلة.

ب ـ وفي المجال $2 > |z| > 1$ فإنه إذا كانت $|z| > 1$ فإن $\frac{1}{|z|} < 1$ وإذا كانت $|z| < 2$ فإن $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ وبالاستفادة من المتسلسلة الهندسية ينتج ما يلي:

$$f(z) = -2 \quad \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z/2}$$

$$= \frac{2}{z} \quad \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{1-z/2}$$

$$= \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\, z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, z^n$$

لاحظ أنه يوجد قوى سالبة وأخرى موجبة للمتغير z في هذه المتسلسلة (وذلك لوجود النقطة المتفردة 1 في المنطقة الداخلية لأي كانتور مغلق وبسيط واقع في المجال الحلقي $2 > |z| > 1$)

جـ ـ وفي المجال $|z| > 2$ فإن $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ وكذلك يكون $|z| > 1$ وإن $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ وبالاستفادة كذلك من المتسلسلة الهندسية ينتج ما يلي:

$$f(z) = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{-2}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2 - 2^{n+1})\, z^{-n}$$

لاحظ أنه لا يوجد قوى موجبة للمتغير z وذلك لوجود نقطتين متفـردتين في المنـطقة الـداخلية لأي كـانتور C في هـذا المجال $|z| > 2$. الأولى متفردة للجزء الأول من الدالة والثانية متفردة للجزء الثاني منها.

د ـ وفي المجـال $|z - 1| < 1$ فـإن علينـا أن نجـد المتسلسلة حـول $z_0 = 1$ وتكون القوى بدلالة $(z - 1)$ لذلك نجد أن:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{1-(z-1)}$$

$$= 2\,(z-1)^{-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

لاحظ بما أن الدالة $\frac{-2}{z-2}$ تحليلية عند $z = 1$، فـإنـها أنتـجـت الجـزء الموجب من متسلسلة لـورانت. ويوجـد فقط حـد واحـد ذو قـوة سالبة.

هـ ـ وفي المجـال $|z - 2| < 1$ فـإن علينـا أن نجـد المتسلسلة حـول $z_0 = 2$ وتكون القوى بدلالة $z - 2$ لذلك نجد أن:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-2}$$

$$= \frac{2}{1+(z-2)} - \frac{2}{z-2}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n - 2\,(z-2)^{-1}$$

لاحظ كـذلـك أن الجـزء السـالب حـد واحـد فقط ظهـر من الـدالـة $\frac{2}{z-2}$ والتي لا تكون تحليلية عند $z = 2$ والجزء المـوجب ظهر من الدالة $\frac{2}{z-1}$ التي تكون تحليلية عند $z = 2$.

مثـال ١٨ :

مثِّل الدالة f بمتسلسلة لورانت حيث إن :

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4}$$

في المجالات التالية :

أ ـ $0 < |z| < 1$ ب ـ $|z - 1| < 1$

الحـل :

أ ـ بما أن النقطة $z = 0$ متفردة للدالة f وتقـع في المنطقـة الداخليـة لأي كانتور واقع في المجال $0 < |z| < 1$ فـإنه بـايجاد متسلسلة مـاكلورين للدالة e^{2z} نستنتج أن :

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

$$= \frac{1}{z^4} \left\{1 + 2z + \frac{4}{2!} z^2 + \frac{8}{3!} z^3 + \dots\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z}\right) + \left(\frac{16}{4!} + \frac{32}{5!} z + \dots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z}\right) +$$

$$+ \frac{2^4}{4!} \left(1 + \frac{2}{5} z + \frac{2^2}{6 \times 5} z^2 + \dots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+4} z^n}{(n + 4)!}$$

لاحظ أن الجزء ذا القوى السالبة مكون من أربعة حدود فقط.

ب ـ أما في المجال $|z - 1| < 1$ فعلينا أن نجد تمثيلاً لكل من الدالتين e^{2z} و $\frac{1}{z^4}$ بمتسلسلة عند $z = 1$ ثم نجد حاصل ضرب كوشي لهما.

وبالاشتقاق المتكرر للدالة e^{2z} فإن $g^n(1) = 2^n e^2, n = 0, 1, 2, \dots$

فتكون:

$$g(z) = e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(1)}{n!} (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!} (z-1)^n$$

لجميع قيم z.

أما الدالة $h(z) = \frac{1}{z^4}$ فيمكن إيجاد المتسلسلة التي تمثلها بالاشتقاق المتكرر للمتسلسلة التي تمثل $\frac{1}{z}$ وذلك لأن:

$$\left(\frac{1}{z}\right)''' = -6z^{-4},$$

أي أن:

$$\frac{1}{z^4} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z}\right)'''$$

ولإيجاد المتسلسلة التي تمثل الدالة $\frac{1}{z}$ بدلالة $z-1$ يمكن ملاحظة أن:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

وبالتالي فإن:

$$h(z) = \frac{1}{z^4} = -\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n\right)'''$$

$$= \frac{-1}{6} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n n(n-1)(n-2)(z-1)^{n-3}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+4} (n+3)(n+2)(n+1)(z-1)^n$$

ومن ذلك:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

ولإيجاد المتسلسلة التي تمثل $f(z) = e^{2z} / z^4$ نجد حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين $g(z)$ و $h(z)$ الذي يكون تقاربياً للدالة f على المجال المشترك بينهما وهو $|z-1| < 1$ ومن ذلك يكون:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-1)^n, \; |z-1| < 1$$

حيث إن

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n-k} \beta_k,$$

$$\alpha_n = \frac{2^n e^2}{n!}$$

وكذلك:

$$\beta_n = \frac{(-1)^n}{6} (n+3)(n+2)(n+1)$$

ولمزيد من الوضوح نجد الحدود الثلاثة الأولى من γ_n

وهي $\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0 = e^2,$ وكذلك

$$\gamma_1 = \alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1 = 2e^2 - e^2 4 = -2e^2,$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \alpha_2 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_0 \beta_2 \\ &= 2e^2 + 2e^2(-4) + 10e^2 \\ &= 4e^2, \ldots\end{aligned}$$

وهكذا.

تمارين ٥ ـ ٤

١ ـ جد متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+i)}$$

في المجالات التالية:

أ ـ $|z| < 1$ ب ـ $|z+i| < 1$

جـ ـ $|z+1| < 1$ د ـ $|z+i| > 1$

٢ ـ جد متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

في المجالات التالية:

أ ـ $|z-1| < 1$ ب ـ $|z-i| < 1$

جـ ـ $|z-i| > 1$ د ـ $|z| > 1$

٣ ـ جد متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة:

$$f(z) = \frac{\cos iz}{z^4}$$

في المجالات التالية:

أ ـ $0 < |z| < 1$ ب ـ $|z| > 0$

جـ ـ $|z-i| < 1$ د ـ $|z-i| > 2$

٤ ـ جد متسلسلة لورانت بدلالة قوى z التي تمثل الدالة:

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$$

في مجالين مختلفين واذكرهما.

٥ ـ مثّل الدالة $f(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$ بما يلي:

أ ـ متسلسلة ماكلورين ثم جد مجال التقارب لها.

ب ـ متسلسلة لورانت في المجال $|z| > 1$.

٦ ـ جد متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{1}{2z}\right)$$

في المجال $|z| > 0$.

٧ ـ بيِّن أن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة: $f(z) = e^{-1/z^2}$

هي $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$ في المجال $|z| > 0$

ثم أجب عما يلي:

أ ـ هل يوجد متسلسلة ماكلورين بقوى المتغير الحقيقي x تمثل الدالة الحقيقية

$x \neq 0, \quad g(x) = e^{-1/x^2}$.

ب ـ بيِّن أن $g^n(0) = 0$ لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$.

جـ ـ بيِّن أن الدالة $f(z)$ ليست متصلة عند $z = 0$.

د ـ هل يوجد متسلسلة ماكلورين تمثل الدالة f بقوى z. لماذا؟

٨ ـ بيِّن أن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة

$$f(z) = e^{\frac{1}{2} t\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

هي $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, z^n$ في المجال $|z| > 0$.

وبفرض أن مسار التكامل هو الكانتور $C: |z| = 1$

بين أن :
$$J_n(t) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - t\sin\theta)\, d\theta$$

ثم بيِّنْ أن :
$$J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$$

تسمى هذه المعاملات $J_n(t)$ دالة بيسيل (Bessel).

٩ ـ بيِّنْ أن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة

$$f(z) = \cos h\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

هي $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n$ حيث إن :

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt \cosh(2\cos t)\, dt$$

وذلك بفرض أن مسار التكامل هو الكانتور $C : |z| = 1$.

١٠ ـ جد متسلسلة لورانت للدالة :

$$f(z) = \frac{1}{z-t}, \ |t| < 1$$

في المجال $|z| > |t|$ (حيث t مقدار ثابت) وبفرض أن $z = e^{\theta i}$
بين أن :

أ ـ
$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\theta = \frac{t\cos\theta - t^2}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

ب ـ
$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin n\theta = \frac{t\sin\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

١١ ـ هل يمكن إيجاد صيغة عامة لمتسلسلة لورانت للدالة :

$$f_k(z) = \frac{1}{(z-t)^k}, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

في المجال $|z| > |t|$.

اقتراح : استعن بالتمرين ١٠ .

٥ ـ ٥ الأصفار والنقاط المتفردة والأقطاب:

تبين لنا أنه إذا كانت الدالة f ممثلة بمتسلسلة لورانت:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_0) \quad \dots\dots (٥ ـ ٤٧)$$

على المجال $r < |z - z_0| < R$ حول z_0 فإن الدالة f ليست تحليلية عند النقطة z_0 وتسمى النقطة z_0 نقطة متفردة لهذه الدالة. وإذا كانت $r = 0$ فإن هذه النقطة المتفردة تسمى نقطة متفردة معزولة وفي هذه الحالة فإن المتسلسلة تتقارب على القرص المثقوب $0 < |z - z_0| < R$. التعريف التالي يصنف أنواع النقاط المتفردة المعزولة.

تعريف ٧:

بفرض أن z_0 نقطة متفردة معزولة للدالة f حيث تتقارب المتسلسلة (٥ ـ ٤٧) على القرص المثقوب $0 < |z - z_0| < R$ فإن:

أ ـ إذا تحقق الشرط

$$\alpha_n = 0, n = -1, -2, \dots \quad \dots\dots (٥ ـ ٤٨)$$

فإن z_0 تسمى نقطة متفردة للدالة f قابلة للإزالة.

ب ـ إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث إن:

$$\alpha_{-m} \neq 0, \alpha_n = 0, n \leqslant -m \quad \dots\dots (٥ ـ ٤٩)$$

فإن z_0 تسمى قطباً من الدرجة m للدالة f.

وإذا كانت $m=1$ فإن z_0 تسمى قطباً بسيطاً للدالة.

جـ - إذا تحقق الشرط:

$$\ldots \alpha_n \neq 0, n = -1, -2, \ldots \quad (٥ - ٥٠)$$

فإن z_0 تسمى نقطة متفردة لازمة للدالة f.

الأمثلة التالية توضح هذه الأنواع من النقاط المتفردة.

مثـال ١٩:

في مثال ١٨ وجد أن الدالة $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4}$

تمثل بالمتسلسلة التالية:

$$\frac{e^{2z}}{z^4} = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+4} z^n}{(n+4)!}$$

في المجال $0 < |z| < 1$.

وحيث إنه يوجد عدد صحيح موجب $m = 4$ يحقق الشرط:

$$\alpha_{-4} = 1 \neq 0, \alpha_n = 0, n < -4$$

وحسب التعريف السابق فإن النقطة المتفردة $z_0 = 0$ تمثل قطباً من الدرجة 4 للدالة f.

مثـال ٢٠:

بيِّن أن النقطة $z_0 = 0$ تمثل نقطة متفردة لازمة للدالة $f(z) = e^{-1/z}$

الحـل:

بإيجاد متسلسلة لورانت لهذه الدالة وهي: $e^{-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}$

على المجال $|z| > 0$. وبما أن $\alpha_n \neq 0$ لكل $n = -1, -2, \ldots$ فإن $z_0 = 0$ نقطة متفردة لازمة للدالة.

مثـال ٢١:

بينّ أنه يمكن إعادة تعريف الـدالة f لتكـون تحليلية عنـد $z = 0$ وبالتـالي تكون كلية حيث إن:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

الحـل:

لنجد متسلسلة لورانت للدالة $\dfrac{\sin z}{z}$ حول $z_0 = 0$ وهي

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left\{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right\}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

نلاحظ أن $z_0 = 0$ نقطة متفردة قابلة للإزالة وذلـك لأن $\alpha_n = 0$ لكل $n = -1, -2, \dots$ حيث يظهر فقط متسلسلة تايلور عند $z_0 = 0$ وبالتالي فإن الدالة تحليلية عند $z_0 = 0$ وباقي الأعداد المركبة فهي بالتالي كلية عنـدما نعيد تعريف الدالة عند $z_0 = 0$ وذلك بجعل:

$$f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \left\{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots\right\} = 1.$$

وبالتالي فإن الدالة تعرف بما يلي:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & , \quad z \neq 0 \\ 1 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

لتكون كلية.

إذا فرض أنه يـوجد z_0 بحيث إن $f(z_0) = 0$ فـإن z_0 تسمى صفر الـدالة f. التعريف التالي يبين أنواع أصفار الدالة.

تعريــف ٨:

إذا كانت z_0 تحقق الشرط التالي: يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن:

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{m-1}(z_0) = 0, \quad \dots\dots (٥ - ١٥)$$

ولكن $f^m(z_0) \neq 0$ فإن z_0 تسمى صفر من الدرجة m للدالة f التحليلية عند z_0.

بما أن الدالة f تحليلية عند z_0 فإنه يوجد متسلسلة تايلور تتقارب للدالة عند z_0 أي أن:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

في مجال تقارب ما D. فإذا كانت z_0 صفراً من الدرجة m للدالة f فإن:

$$f^m(z_0) \neq 0, f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{m-1}(z_0) = 0$$

وبالتالي تصبح المتسلسلة كما يلي:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{m+k} \cdot (z - z_0)^{m+k}$$

$$= \alpha_m (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$$

فإذا فرض أن $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k$

تتقارب للدالة التحليلية $g(z)$ عند z_0 في المجال D فإن:

$$f(z) = \alpha_m (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

وهذا يبرهن النظرية التالية:

نظرية ٢٢ :

بفرض أن الدالة f تحليلية عند z_0 فإنه يوجد لها صفر من الدرجة m إذا وإذا فقط وجدت دالة $g(z)$ تحليلية عند z_0, $g(z_0) \neq 0$ بحيث إن :

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \ldots\ldots (٥ - ٥٢)$$

النظرية التالية تربط بين القطب من الدرجة m والصفر من الدرجة m.

نظرية ٢٣ :

إذا كانت الدالة g تحليلية عند z_0 وان $g(z_0) \neq 0$ وعرفنا الدالة f بالمساواة :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \ldots\ldots (٥ - ٥٣)$$

فإن z_0 قطب من الدرجة m للدالة f.

البرهـــان :

نتركه تمريناً للقارىء.

مثـــال ٢٢ :

ناقش ثم صنف أصفار وأقطاب الدالة : $f(z) = \cot z$

الحـــل :

بما أن

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

فإن النظرية السابقة تبين أن الأقطاب والأصفار محصورة بأصفار البسط والمقام للدالة f ويفرض أن :

$$\cos z = 0$$

فإن :

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

وبما أن

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$$

فإن

$$\cos'\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$$

أي أن هذه أصفار بسيطة من الدرجة 1 وهي كذلك للدالة f ويفرض أن:

$$\sin z = 0$$

فإن :

$$z = n\pi, n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

وبما أن $\cos(n\pi) \neq 0$ فإن $\sin'(n\pi) \neq 0$ فهي أصفار بسيطة للدالة $\sin z$ وبالتالي تكون أقطاباً بسيطة (من الدرجة ١) للدالة f.

مثـال ٢٣ :

إذا كانت f دالة نسبية حيث إن:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

حيث إن Q و P كثيرتا حدود من درجات مختلفة. فإذا وجدت نقطة z_0 تمثل صفراً من الدرجة m للدالة $P(z)$ وصفراً من الدرجة n للدالة $Q(z)$ فإنه يوجد كثيرتا حدود $q(z)$ و $p(z)$ بحيث إن:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(z - z_0)^m P(z)}{(z - z_0)^n q(z)}$$

فإن النقطة z_0 تمثل إحدى الحالات التالية بالنسبة للدالة f.

أ ـ إذا كانت $m > n$ فإن z_0 نقطة متفردة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة f وهي كذلك تمثل صفراً من الدرجة $m - n$ للدالة f.

ب ـ إذا كانت $m < n$ فإن z_0 تمثل قطباً من الدرجة $n - m$ للدالة f

جـ ـ إذا كانت $m = n$ فإن z_0 تمثل نقطة متفردة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة f ولكنها ليست صفراً لها أي أنه يمكن إعادة تعريف الدالة f لتكون تحليلية عند z_0 بحيث إن $f(z_0) \neq 0$.

مثال ٢٤:

إذا فرض أن z_0 تمثل نقطة متفردة قابلة للإزالة للدالة f فإن:

أ ـ الدالة f محدودة على القرص المثقوب $0 < |z - z_0| < R$ أي أنه يوجد $k > 0$ بحيث إن: $|f(z)| \leq k$

لكل z تحقق $0 < |z - z_0| < R$.

ب ـ كذلك يوجد عدد مركب w_0 بحيث إن:

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

جـ ـ يمكن إعادة تعريف f لتصبح تحليلية عند z_0 وذلك بتعريف $f(z_0)$ لتكون:

$$f(z_0) = w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

النظرية التالية تفيد بأن الدالة التحليلية عند أحد أصفارها إما أن تكون دالة صفرية أو إنه لا يوجد لها أصفار أخرى في قرص مثقوب مركزه z_0.

نظرية ٢٤:

إذا كانت f تحليلية عند z_0 ويوجد لها صفر عند z_0 فإما أن تكون $f \equiv 0$ أو إنه يوجد قرص مثقوب $0 < |z - z_0| < R$ بحيث إن $f(z) \neq 0$ لكل z تحقق $0 < |z - z_0| < R$.

البرهـــان:

بفــرض أن f ليست الــدالــة الصفــريــة فــإنــه يــوجــد m بحيث إن $f^m(z_0) \neq 0$ أي أن z_0 صفر من الدرجة m وبالتالي فإنه يوجد دالة $g(z)$ تحليلية حول z_0 وتحقق $g(z_0) \neq 0$ وإن:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

وبشكل خاص فإن g متصلة عند z_0 وبالتالي فإنه يوجد قرص $|z - z_0| < R$ بحيث أن $g(z) \neq 0$ لكل z في هذا القرص وهذا يثبت أن: $f(z) \neq 0$ لكل z تحقق $0 < |z - z_0| < R$.

وهذا ينهي اثبات النظرية.

نظرية ٢٥:

إذا كانت الدالة f تحليلية في القرص المثقوب $0 < |z - z_0| < R$ وكانت f محدودة في هذا القــرص فإمــا أن تكون f تحليليــة عند z_0 أو يـوجد لهـا نقطة متفردة قابلة للإزالة عند z_0.

البرهـــان:

عرف الدالة g بما يلي:

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & , z \neq z_0 \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

فإن الدالة g تحليلية في القرص المثقوب $0 < |z-z_0| < R$ بالإضافة إلى ذلك يمكن أن نثبت أن g تحليلية عند z_0 ولذلك نجد المشتقة:

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

وبما أن f محدودة في ذلـك القرص المثقـوب فإن $g'(z_0) = 0$ وبـالتالي فـإن g محـدودة على z_0 ويمكن بـالتـالي تمثيلهـا بتسلسلة تـايلور وبمـا أن $g'(z_0) = 0$ وكذلك $g''(z_0) = 0$ فإن :

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}$$

وهذا ينهي اثبات النظرية (لماذا؟).

وأخيراً فإن النظرية التالية تصف سلوك الدالة عند أحد أقطابها.

نظرية ٢٦ :

إذا كانت z_0 قطباً من الدرجة m للدالة f فإن :

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

البرهـــان :

نترك البرهان تمريناً للقارىء.

تمارين ٥ ـ ٥

١ ـ صنف النقاط المتفردة لكل من الدوال التالية:

أ ـ $f(z) = \frac{1}{z^4} e^{z^2}$ ب ـ $f(z) = \frac{\cos z}{1 + z^2}$

جـ ـ $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^3}$ د ـ $f(z) = \tan 2z$

هـ ـ $f(z) = \cot\left(\frac{i}{z}\right)$ و ـ $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$

ز ـ $f(z) = z^4 \sec\left(\frac{1}{z}\right)$

٢ ـ برهن أنه يوجد صفر من الدرجة m للدالة التحليلية f إذا وإذا فقط يوجد قطب من الدرجة m للدالة $g = \frac{1}{f}$.

٣ ـ لأي دالتين تحليليتين f و g بحيث إن z_0 صفر من الدرجة m للدالة f وهي صفر من الدرجة n للدالة g فإن:

أ ـ z_0 تمثل نقطة متفردة قابلة للإزالة للدالة $h = f/g$ وهي صفر من الدرجة $m - n$ إذا كانت $m > n$.

ب ـ z_0 تمثل قطباً من الدرجة $n - m$ للدالة $h = f/g$ إذا كانت $m < n$.

جـ ـ z_0 تمثل نقطة متفردة قابلة للإزالة للدالة $h = f/g$ ويمكن اعادة تعريف h لتكون $h(z_0) \neq 0$ إذا كانت $m = n$.

٤ ـ برهن نظرية ٢٦.

اقتراح: استفد من الحقيقة أن f تمثل على الصورة $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$

حيث إن $h(z)$ تحليلية عند z_0 وإن $h(z_0) \neq 0$.

٥ - إذا كانت f تحليلية على القرص المثقوب $0 < |z - z_0| < R$ فبين أن

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجودة.

٦ - إذا فرض أن f تحليلية في المجال D فإذا كانت z_0 نقطة في D بحيث إنه يوجد متتالية (z_n) تحقق:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0, \quad f(z_n) = 0$$

لكل عدد صحيح موجب n فإن $f(z) = 0$ لكل z في D.

اقتراح: استعن بنظرية ٢٤.

٧ - يفرض أن f و g دالتان تحليليتان على المجال D وأن المتتالية (z_n) و z_0 في D بحيث إن $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ فإذا كان $g(z_n) = f(z_n)$ لكل عدد صحيح موجب n فبرهن أن $f(z) = g(z)$ لكل z في D.

اقتراح: استفد من التمرين السابق.

٨ - إذا كانت z_0 قطباً من الدرجة m و n للدالتين f و g على الترتيب فأثبت أن z_0 قطب من الدرجة m+n للدالة $h = g \cdot f$.

٩ - كرر التمرين السابق إذا كانت z_0 صفراً وليس قطباً.

١٠ - أعد تعريف الدوال التالية لتكون تحليلية عند النقاط المتفردة لها.

أ - $$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

ب - $$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

جـ - $$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$$

١١ ـ برهن أنه إذا كانت z_0 تمثل قطباً من الدرجة m للدالـة f فإنها تمثـل قطباً من الدرجة $m + 1$ للدالة f'.

١٢ ـ برهن أو انف بمثال عددي الجمل التالية:

أ ـ إذا كـانت z_0 قطبـاً للدالتين f و g فـانها تكون قـطبـاً للدالـة $f + g$.

ب ـ إذا كانت z_0 نقطة متفردة لازمة لكل من الدالتـين f و g فإنها تكون نقطة متفردة لازمة للدالة $f + g$.

الفصل السادس

نظرية الباقي

RESIDUE THEORY



الفصل السادس

نظرية الباقي
Residue Theory

علمنا كيف نجد قيمة تكامل دالة حول مسار مغلق وبسيط C إذا وجد لهذه الدالة نقطة متفردة في المنطقة الداخلية لهذا الكانتور وذلك باستخدام نظرية كوشي ونتائجها ولكن كيف يمكن إيجاد قيمة ذلك التكامل إذا وجدت للدالة أكثر من نقطة متفردة واحدة في المنطقة الداخلية للكانتور C. هذا ما تجيب عليه نظرية الباقي.

٦ ـ ١ نظرية الباقي

نفرض أن z_0 نقطة متفردة للدالة f واقعة في المنطقة الداخلية للكانتور المغلق البسيط وموجب الاتجاه C. وبذلك فإنه يوجد متسلسلة لورانت حول z_0 تمثل الدالة f وهي :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \quad \ldots \quad (٦ - ١)$$

وبايجاد قيمة التكامل حول C فإن

أي أن

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C \alpha_n (z - z_0)^n\, dz$$

$$\int_C f(z)\, dz = \ldots + \alpha_{-n} \int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz + \ldots + \alpha_{-1} \int_C \frac{1}{(z-z_0)}\, dz +$$

$$+ \alpha_0 \int_C dz + \alpha_1 \int_C (z-z_0)\, dz + \ldots$$

بما أن القوى الموجبة تجعل المكامل تحليلياً على مجال يحتوي المسار C فإن نظرية كوشي ـ كورسات تبين أن قيمة التكامل صفر لكل القوى الموجبة وكذلك القوى السالبة $|n|>1$ فإن إحدى نتائج نظرية كوشي تؤكد أن التكامل صفر. يبقى التكامل

$$(٢ - ٦) \ldots \int_C f(z)\, dz = \alpha_{-1} \int_C \frac{1}{z-z_0}\, dz$$

وبتطبيق نظرية كوشي نستنتج أن:

$$(٣ - ٦) \ldots \int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, \alpha_{-1}$$

حيث إن α_{-1} معامل حدّ من حدود القوى السالبة في متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة. وهذا يوحي أن هذا المعامل α_{-1} يلعب دوراً هاماً في التكامل لذلك أعطي التعريف التالي:

تعريف ١:

اذا كانت z_0 تمثل نقطة متفردة معزولة للدالة f فإن α_{-1} وهو معامل الحد $\frac{1}{z-z_0}$ في متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة f تسمى باقي الدالة f عند z_0 وبالرموز

$$(٤ - ٦) \ldots \operatorname{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1}$$

المساواة (٦ ـ ٣) هي نظرية كوشي للتكامل بلغة الباقي لذلك نعيد صياغتها لأهميتها.

نظرية ١:

اذا كانت النقطة z_0 نقطة متفردة معزولة للدالة f وكان C كانتوراً مغلقاً وبسيطاً موجب الاتجاه يحتوي النقطة z_0 في المنطقة الداخلية فإن:

$$(٥ - ٦) \ldots \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

ولكن كيف يمكن إيجاد باقي الدالة f عند النقطة المتفردة z_0، وهي $Res(f, z_0)$؟. النظريات التالية تبين كيفية ذلك حيث تبدأ النظرية ٢ بايجاد $Res(f, z_0)$ اذا كانت z_0 قطباً بسيطاً للدالة f.

نظرية ٢:

اذا كانت z_0 قطباً بسيطاً للدالة f فإن:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \quad \ldots (٦ - ٦)$$

البرهان:

بما أن z_0 قطب بسيط فإن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة f حول z_0 هي:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$$

وبضرب الطرفين بالمقدار $(z - z_0)$ نجد أن:

$$(z - z_0) f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^{n+1}$$

وبإيجاد النهاية للطرفين عندما تقترب z من z_0 ينتج أن:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \alpha_{-1}$$

وحسب التعريف فإن:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

أما إذا كانت النقطة المتفردة قطباً من الدرجة $n>1$ فإن النظرية التالية تبين كيف نجد $Res(f, z_0)$.

نظرية ٣:

إذا كانت z_0 قطباً من الدرجة $n>1$ للدالة f فإن:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] \quad \ldots (٧ - ٦)$$

البرهان :

بما أن z_0 قطب من الدرجة $n>1$ للدالة f فإن متسلسلة لورانت لهذه الدالة حول z_0 تأخذ الشكل :

$$f(z) = \frac{\alpha_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{\alpha_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + \alpha_0 + \alpha_1 (z-z_0) + \ldots$$

وبضرب الطرفين بالمقدار $(z-z_0)^n$ نحصل على ما يلي :

$$(z-z_0)^n f(z) = \alpha_{-n} + \alpha_{-(n-1)} (z-z_0) + \ldots + \alpha_{-1} (z-z_0)^{n-1} + \alpha_0 (z-z_0)^n + \alpha_1 (z-z_0)^{n+1} + \ldots$$

وبالاشتقاق المتكرر $(n-1)$ مرة نجدة أن :

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!\, \alpha_{-1} + n!\, \alpha_0 (z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!} \alpha_1 (z-z_0)^2 + \ldots$$

وبإيجاد النهاية للطرفين عندما تقترب z من z_0 فإن :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!\, \alpha_{-1}$$

وحسب التعريف فإن :

$$\text{Res}\,(f, z_0) = \alpha_{-1} = \lim \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right], \; n>1.$$

وهذا ينهي إثبات النظرية .

مثـــال ١ :

جد قيمة $\text{Res}\,(f, z_0)$ للدالة :

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 (z^2+1)}$$

الحـل:

يمكن أن نحلل مقام الدالة كما يلي:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 (z-i)(z+i)}$$

وبما أن:

$$(z-i) f(z) = \frac{z+2}{z^2 (z+i)}$$

تحليلية عند $z_1=i$ فإن $z_1=i$ قطب بسيط للدالة وكذلك بما أن:

$$(z+i) f(z) = \frac{z+2}{z^2 (z-i)}$$

تحليلية عند $z_2 = -i$ فإن $z_2 = -i$ قطب بسيط كذلك للدالة. ولكن بما أن:

$$z^2 f(z) = \frac{z+2}{z^2+1}$$

تحليلية عند $z_3=0$ فإن $z_3=0$ قطب من الدرجة 2 للدالة.

وبتطبيق النظرية ٢ والنظرية ٣ نستنتج أن:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \to i} (z-i) f(z) \\ &= \lim_{z \to i} \frac{z+2}{z^2 (z+i)} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i\right) \end{aligned}$$

وأن:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -i) &= \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) \\ &= \lim_{z \to -i} \frac{z+2}{z^2 (z-i)} = \left(-\frac{1}{2} - i\right) \end{aligned}$$

أما عند القطب الثالث فإن:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[(z-z_0)^2 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z+2}{z^2+1} \right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-z^2-4z+1}{(z^2+1)^2}$$

$$= 1.$$

النتيجـة التاليـة تلعب دوراً هامـاً في إيجاد بـاقي الدالـة التي تتكون من كسر بسطه ومقامه دالتان تحليليتان.

نتيجة ٤:

نفرض أن f و g دالتان تحليليتان عند النقطة z_0 فإذا كـان $f(z_0) \neq 0$ بينما z_0 صفر بسيط للدالة g فإن:

$$(\text{٨ - ٦}) \ldots\ldots \text{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

حيث إن: $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$

البرهان:

بمـا أن z_0 صفر بسيط للدالـة g فإن $g'(z_0) \neq 0$ وهي بـالتـالي قـطب بسيط للدالة h وحسب النظرية ٢ فإن:

$$\text{Res}(h, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, h(z)$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\left(\dfrac{g(z)}{z-z_0}\right)}$$

وبما أن $g(z_0) = 0$ فإن:

$$\text{Res}(h, z_0) = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}$$

وبما أن كلاً من الدالتين f و g تحليلية عند z_0 (وهما بالتالي متصلتان) فإن:

$$\text{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

مثـال ٢:

جد قيمة $\text{Res}(f, z_0)$ للدالة:

$$f(z) = \tan z$$

الحـل:

بما أن sin z و cos z تحليليتان على كل الأعداد المركبة فإن:

$$f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$$

تحقق شروط النتيجة ٤ حيث إن: $\cos z = 0$

اذا وإذا فقط $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث n عدد صحيح وبما أن:

$$-\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \cos'\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \pm 1 \neq 0$$

فإن:

$$\text{Res}\left(f, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\cos'\left(n + \frac{1}{2}\right)} = -1$$

لكل عدد صحيح n.

النظرية التالية تمكننا من إيجاد قيمة التكامل إذا تواجد أكثر من نقطة متفردة واحدة في المنطقة الداخلية لمسار التكامل.

نظرية ٥ (نظرية الباقي) Residue Theorem

إذا كانت النقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ نقاطاً متفردة للدالة التحليلية f واقعة في المنطقة الداخلية للكانتور المغلق البسيط موجب الاتجاه C فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k) \quad \ldots \quad (٦ - ٩)$$

البرهان:

لتكن $C_1, C_2, \ldots, C_n$ دوائر مراكزها $z_1, z_2, \ldots, z_n$ على الترتيب، ليست متماسة أو متقاطعة وواقعة في المنطقة الداخلية للمسار C وكذلك موجبة الاتجاه.

ليكن B الكانتور الذي يحيط بالمنطقة التي تقع داخل الكانتور C وخارج الدوائر $C_1, C_2, \ldots, C_n$ كما يبين الشكل ـ ١ ـ:

وبتطبيق إحدى نتائج كوشي ـ كورسات فإن:

$$\int_B f(z)\,dz = 0 = \int_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

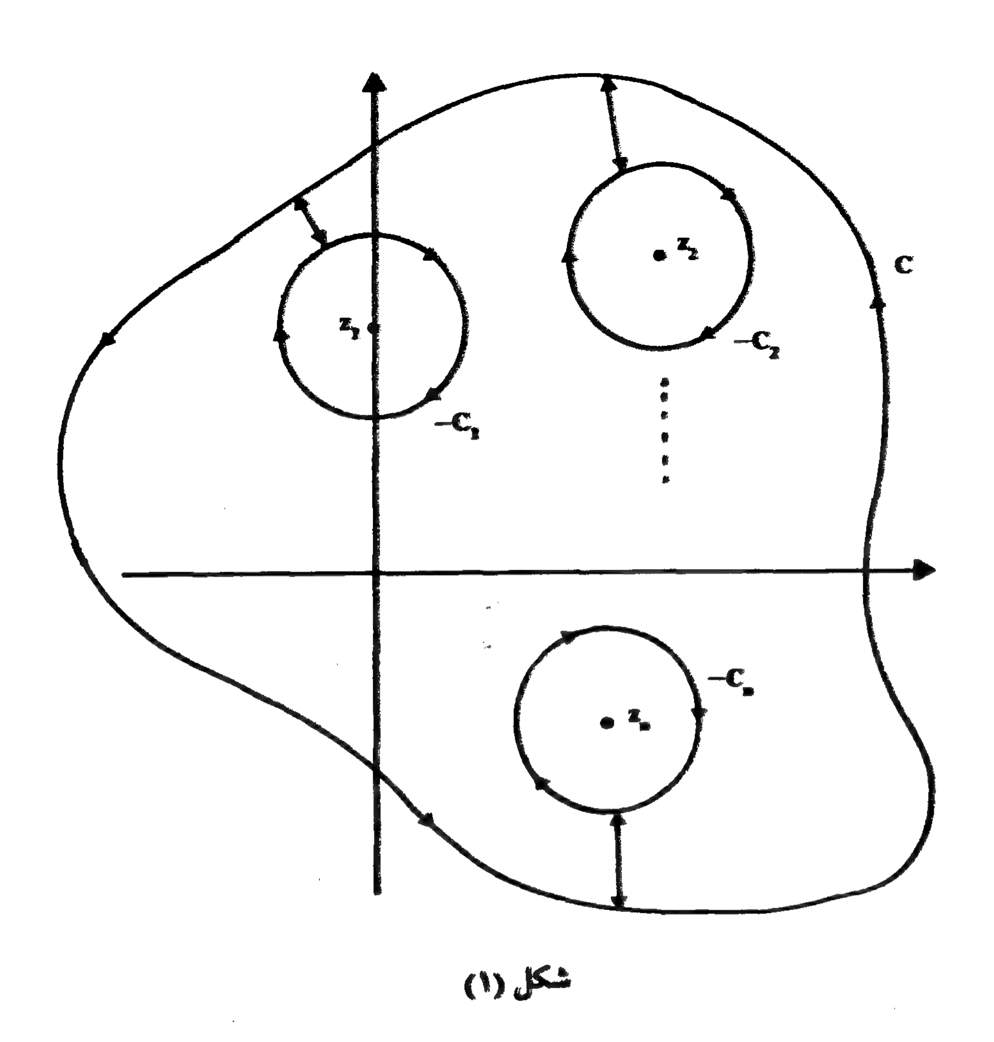
وبتطبيق نظرية ١ أعلاه فإن:

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i.\ \text{Res}(f, z_k)$$

وعليه فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k)$$

وهذا ينهي إثبات النظرية. هذه النظرية تسمى نظرية كوشي للباقي.



شكل (١)

مثــال ٣:

جد قيمة التكامل $\int_C f(z)\, dz$

إذا كانت $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2(z^2+1)}$ في الحالات التالية:

أ ـ C هي المسار $|z| = \dfrac{1}{2}$

ب ـ C هي المسار $|z-i| = \dfrac{1}{2}$

جـ ـ C هي المسار $|z+i| = \frac{1}{2}$

د ـ C هي المسار $|z| = 2$.

هـ ـ C هي المسار $|z-2| = 1$.

الحـل:

بما أن المسار C في (أ) يحتوي فقط القطب من الدرجة الثانية $z_0 = 0$ في المنطقة الداخلية له فإن:

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

وبالاستفادة من مثال ١ فإن:

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i$$

أما المسار في (ب) فإنه كذلك يحتوي القطب البسيط $z = i$ في المنطقة الداخلية له وبالاستفادة من مثال ١ فإن:

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$= (-2\pi - \pi i)$$

وكذلك المسار في (جـ) يحتوي القطب البسيط $z = -i$ وبالاستفادة من مثال ١ فإن:

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i)$$

$$= (2\pi - \pi i)$$

أما المسار في الفرع (د) فإنه يحتوي الأقطاب الثلاثة وبالتالي فإن النظرية ٥ تؤكد أن:

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i \left\{\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)\right\}$$

$$= 2\pi i \left\{1 - \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} - i\right\}$$

$$= 0.$$

لاحظ أن قيمة التكامل صفر على المسار $C: |z| = 2$ بينما الدالة ليست تحليلية عند ثلاث نقاط تقع في المنطقة الداخلية للمسار.

نترك إيجاد قيمة التكامل في الفرع (هـ) تمريناً للقارىء.

تمارين ٦ - ١

١ - جد ثم صنف النقاط المنفردة للدوال التالية ثم جد $Res\ (f, z)$.

أ - $f(z) = z^2 \cdot e^{1/z}$ ب - $f(z) = z^{-3} \cdot \sin z$

جـ - $f(z) = \dfrac{1-e^{3z}}{z^3}$ د - $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^4}$

هـ - $f(z) = z^3 \cdot \cos \dfrac{1}{z}$ و - $f(z) = \dfrac{e^z}{z\,(z^2+8)}$

ز - $f(z) = \dfrac{1-z}{z^2-3iz+2}$ ح - $f(z) = z^{-2} \cdot \sec z$

٢ - جد قيمة كل من التكاملات التالية:

أ - $|z| = 3: C, \int_c \dfrac{e^z}{z^2 . (z^2+4)}\, dz$

ب - $|z| = 2: C, \int_c \dfrac{\cos z}{z\,(z-i)^2}\, dz$

جـ - $\left|z - \dfrac{\pi}{2}\right| = \dfrac{3\pi}{2}: C, \int_c \sec z\, dz$

د - $|z| = 2: C, \int_c \dfrac{2z-3}{z^5-i}\, dz$

هـ ـ $\int_c \frac{e^{2zi}}{z(z-2)^2(z-3i)}\, dz$, $C: |z-2| = 1$

٣ ـ جد قيمة التكامل:

$$\int_c e^{1/z} \cos \frac{1}{z^2}$$

في الحالات:

أ ـ $C: |z| = 1$

ب ـ $C: |z-2i| = 1$

٤ ـ أعط مثالاً لدالة تحقق الشروط التالية:

الدالة f لها ثلاث نقاط متفردة في المنطقة الداخلية لكانتور مغلق وبسيط وهي تحليلية على مجال يحتوي هذا الكانتور (ما عدا بالطبع النقاط الثلاث) ويكون $\int_c f(z)\, dz = 0$.

٥ ـ نفرض أن z_0 صفر من الدرجة m للدالة التحليلية f بيّن أن الدالة $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ لها قطب بسيط عند z_0 وأن $\text{Res}(g, z_0) = m$.

٦ ـ في التمرين السابق إذا فرض أن z_0 تقع في المنطقة الداخلية لكانتور مغلق وبسيط وموجب الاتجاه C وأن f تحليلية على مجال يحتوي هذا الكانتور C جد قيمة:

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

٧ ـ إذا فرض أن z_0 نقطة متفردة لكل من الدالتين f و g برهن أن:

$$\text{Res}(f+g, z_0) = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$$

٨ ـ بفرض أن P(z) كثيرة حدود درجتها على الأكثر 2 فإذا كانت α و β و γ أعداداً مركبة مختلفة وكانت:

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}$$

فبرهن أن:

أ - $$A = \text{Res}(f, \alpha) = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

ب - $$B = \text{Res}(f, \beta) = \frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

جـ - $$C = \text{Res}(f, \gamma) = \frac{P(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

ثم بينّ أن:

$$\frac{P(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \frac{C}{z-\gamma}$$

٩ - بفرض أن $P(z)$ كثيرة حدود درجتها على الأكثر 2، فإذا كانت:

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha)^2 (z-\beta)}$$

حيث إن α و β أعداداً مركبة مختلفة فبرهن أن:

$$f(z) = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\alpha)} + \frac{C}{(z-\beta)}$$

حيث إن:

$$A = \text{Res}\left((z-\alpha)\, f(z).\ \alpha\right),$$
$$B = \text{Res}(f, \alpha),$$
$$C = \text{Res}(f, \beta).$$

١٠ ـ بفرض أن z_0 صفر بسيط للدالة f، برهن:

أ ـ z_0 قطب من الدرجة 2 للدالة:

$$g(z) = \frac{1}{[f(z)]^2}$$

ب ـ ثم بيِّن أن:

$$\text{Res}\,(g, z_0) = \frac{-f''(z_0)}{(f'(z_0))^3}$$

جـ ـ بيِّن أن $-\overline{z}_0$ قطب من الدرجة 2 للدالة g وأن:

$$\text{Res}\,(g, -\overline{z}_0) = -\overline{\text{Res}\,(g, z_0)}$$

١١ ـ بيِّن أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{\sinh z}\,dz = 1 - 2\cos \pi t + 2\cos (2\pi t)$$

حيث إن C تمثل الدائرة $|z| = 8$ بالاتجاه الموجب،

١٢ ـ بيِّن إن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2+3} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}\,\pi$$

حيث إن C هو المستطيل المكون من $x = \pm 2$, $y = 0$, $y = 1$ بالاتجاه الموجب.

٦ ـ ٢ التكاملات المعتلة:

نفرض أن الدالة f متصلة على الفترة [a, ∞) فإن التكامل المعتل لهذه الدالة هو:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

وإذا كانت f متصلة على الفترة (−∞, b] فإن التكامل المعتل لها هو:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

ويمكن أن يأخذ التكامل المعتل الشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة (−∞, ∞).

ويقال أن التكامل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ تقاربي ويأخذ القيمة العدد الحقيقي I إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$(١٠ - ٦) \quad \ldots \quad I = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

وبالمثل يقال عن التكامل $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ أنه تقاربي ويأخذ القيمة العدد الحقيقي I إذا وإذا فقط تحقق الشرط.

$$(١١ - ٦) \quad \ldots \quad I = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^b f(x)\,dx$$

وإذا كان $\int_a^\infty f(x)\,dx$ تقاربياً ويأخذ القيمة I_1 وكان التكامل $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ تقاربياً ويأخذ القيمة I_2 فإن التكامل $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ يكون تقاربياً ويأخذ القيمة

$I = I_1 + I_2$. كذلك اذا كان التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ تقاربياً فإنه يأخذ القيمة I

حيث إن:

$$(12-6) \ldots I = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

وهذه القيمة تسمى قيمة كوشي الرئيسية للتكامل وبالرموز:

$$(13-6) \ldots P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

ومن الجدير بالذكر أنه يمكن أن توجد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل دون أن يكون التكامل نفسه تقاربياً كما يبين المثال التالي:

مثـال ٤:

إذا كانت $f(x) = x^3$ فجد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ثم بيـنّ ما إذا كان هذا التكامل تقاربياً أم لا.

الحـل:

قيمة كوشي الرئيسية لهذا التكامل هي:

$$\begin{aligned} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x^3\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-t}^{t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ولمعرفة كون التكامل تقاربياً أم لا نجد قيمة:

$$\int_{0}^{\infty} x^3\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4} x^4 \Big|_{0}^{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4} t^4 = \infty$$

وهذا يبين أن التكامل ليس تقاربياً.

كـذلـك يجـدر بنـا أن ننـوه أنـه إذا كـانت الـدالـة زوجيـة (أي تحقق $f(-x) = f(x)$ لكل عدد حقيقي x) فإنه إذا كانت قيمة كوشي الرئيسة للتكامل موجودة فإن التكامل نفسه يكون تقاربياً لنفس القيمة وهنا يتحقق ما يلي:

$$(١٤ - ٦) \ldots \int_0^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

سنبين كيف يمكن أن نستفيد من نظرية البـاقي لإيجاد التكـاملات المـركبة في إيجاد قيم أنواع خاصة من التكاملات المعتلة.

نفرض أن الدالة f نسبية أي:

$$(١٥ - ٦) \ldots f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

حيث إن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتا حدود بحيث إن $Q(x) \neq 0$ لكل عـدد حقيقي x. فـإن أقـطاب الـدالـة $f(z)$ إمـا تكـون واقعـة في النصف العلوي أو النصف السفلي من المستوي. نفـرض أن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ هي أقطاب الـدالة f الـواقعة في النصف العلوي من المستـوي المركب. فـإذا كان المسـار C مكـون من جـزئـين النصف العـلوي من الـدائـرة C_R: $z = Re^{\theta i}, 0 \leq \theta \leq \pi$ والخط المسـتقيم الواصل بين $-R$ و R بالاتجاه الموجب كما يبين الشكل ـ ٢ ـ

ونفرض أن R تكفي لأن تكون جميـع الأقطاب في النصف العلوي واقعـة في المنطقة الداخلية للكانتور C فإن نظرية كوشي للباقي تؤكد أن:

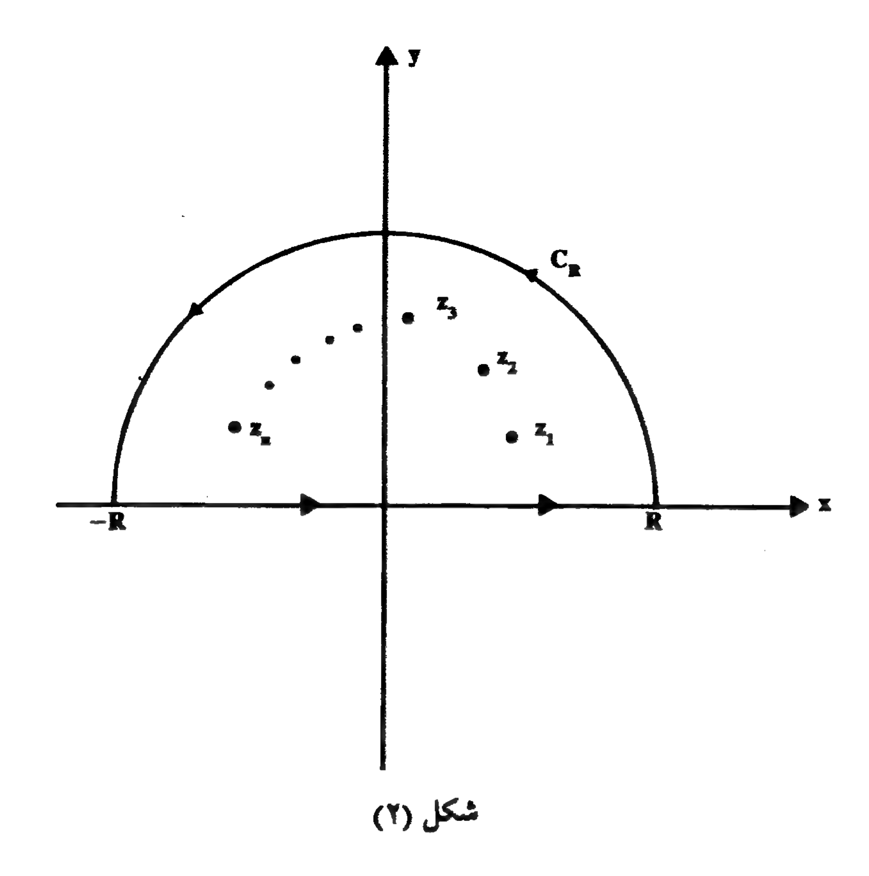
$$(١٦ - ٦) \ldots \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) = I$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل كمجموع تكاملين.

$$I = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$$

وبما أن الطرف الأيسر لا يعتمد على قيمة R كلما كبرت R فإن:

$$(١٧ - ٦) \ldots I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$$



شكل (٢)

وهكـذا يتبين أن قيمـة كوشي الـرئيسـة للتكـامـل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ تعتمـد عـلى التكامل المركب.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz \quad \ldots \quad (٦ - ١٨)$$

فـإذا كانت النهـاية (٦ ـ ١٨) صفـراً فـإن قيمـة كـوشي الـرئيسـة للتكـامـل مـوجودة. النظرية التـاليـة تبـينُ الشروط التي تضمن كـون النهـايـة (٦ ـ ١٨) صفراً.

نظرية ٦:

إذا كانت $Q(x) \neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x وكانت:

$\deg Q \geqslant 2 + \deg P$

فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) = 0 \quad \ldots \quad (٦ - ١٩)$$

حيث إن $f = \frac{P}{Q}$ وأن C_R نصف الدائرة العلوي بحيث يحتوي كل أقطاب الدالة f الواقعة في النصف العلوي من المستوي المركب.

البرهان:

تبين لنا أثناء برهان النظرية الأساسية للجبر أن:

$$|Q(z)| \geq \frac{1}{2} |z|^n$$

حيث إن $n = \deg Q$ ومن ذلك فإن:

$$\left| \frac{1}{Q(z)} \right| < \frac{2}{|z|^n} \quad \ldots \quad (٦ - ٢٠)$$

وعليه فإن:

$$|f(z)| = \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leqslant \frac{2|P(z)|}{|z|^n}$$

فإذا كانت R كبيرة نسبياً وبالتالي فإن $|z|$ تكون كبيرة نسبياً فإنه يوجد عدد ثابت K بحيث إن:

$$|P(z)| < K |z|^m \quad \ldots \quad (٦ - ٢١)$$

حيث إن $m = \deg P$ وبما أن $m + 2 \leqslant n$ فإن:

$$|f(z)| \leqslant \frac{2K |z|^m}{|z|^{m+2}} < \frac{2K}{R^2} \quad \ldots \quad (٦ - ٢٢)$$

وبالتالي فإن:

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leqslant \frac{2\pi K}{R}$$

وبأخذ النهاية عندما R تزداد بدون حد فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

وبذلك نكون قد وصلنا لإثبات النظرية التالية كذلك:

نظرية ٧:

إذا كانت $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ بحيث إن:

$$\deg Q \geqslant 2 + \deg P$$

وكانت $Q(x) \neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية فإن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ موجودة وهي:

$$(٦ - ٢٣) \quad \ldots \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$

حيث إن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ هي أقطاب الدالة f الواقعة في النصف العلوي من المستوي المركب.

مثـال ٥:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\, dx$$

الحـل:

بملاحظة أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بالعدد 2 على الأقل وكذلك

كثيرة الحدود في المقام ليس لها جذور حقيقية فإن شروط النظريات السابقة متحققة لذلك فإن قيمة كوشي الرئيسة لهذا التكامل موجودة وهي :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$

لذلك نجد أقطاب الدالة الواقعة في النصف العلوي من المستوي وهي :

$z = 2i, 3i$

فإذا كانت:

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

وحيث أن هذه الأقطاب بسيطة فإن:

$$\text{Res}\,(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} (z-2i)\, f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{2z+1}{(z+2i)(z^2+9)}$$

$$= \frac{1+4i}{4i\,(5)} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\, i\right).$$

وكذلك فإن:

$$\text{Res}\,(f, 3i) = \lim_{z \to 3i} (z-3i)\, f(z)$$

$$= \lim_{z \to 3i} \frac{2z+1}{(z^2+4)(z+3i)} = \frac{1+6i}{(-5)\, 6i}$$

$$= \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{30}\, i\right).$$

وبهذا فإن قيمة التكامل هي :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\, i - \frac{1}{5} + \frac{1}{30}\, i\right)$$

$$= \frac{\pi}{30}.$$

يمكن توظيف أسلوب إثبات النظريات السابقة لايجاد قيمة كوشي الرئيسة لتكاملات معتلة ليس فيها المكامل بالضرورة دالة نسبية (حاصل قسمة كثيرتي حدود). كما يشير المثال التالي:

مثـال ٦:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{nx}} \, dx, \; n \geqslant 2$$

الحـل:

بايجاد أصفار المقام نجد أقطاب الدالة:

$$1 + e^{nx} = 0$$

ومن ذلك فإن:

$$nz = \log(-1) = (2k+1)\pi i,$$
$$k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

وعليه فإن أقطاب هذه الدالة هي:

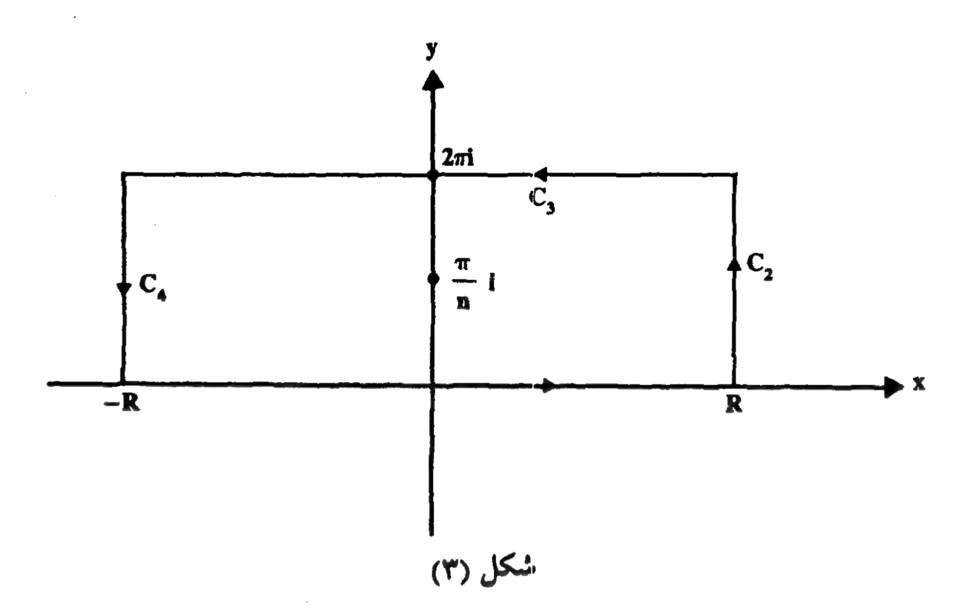
$$z = \frac{2k+1}{n} \pi i, \; k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

لذلك فإن هناك عدداً لا نهائياً من الأقطاب مما يجعل الكانتور المكون من نصف دائرة وقطعة مستقيمة في النظرية ٧ لا يصلح لأنه لا يوجد دائرة نصف قطرها عدد حقيقي تحتوي هذه الأقطاب جميعها لذلك نأخذ الكانتور C في الشكل (٣):

حيث إن C مكون من: C_1, C_2, C_3, C_4

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

ليكون موجب الاتجاه.



شكل (٣)

فيكون التكامل كما يلي:

$$\int_{C} \frac{e^{z}}{1+e^{nz}}\, dz = \int_{C_1} \frac{e^{z}}{1+e^{nz}}\, dz + \int_{C_2} \frac{e^{z}}{1+e^{nz}}\, dz +$$

$$+ \int_{C_3} \frac{e^{z}}{1+e^{nz}}\, dz + \int_{C_4} \frac{e^{z}}{1+e^{nz}}\, dz.$$

لنحاول الآن إيجاد قيمة كل من هذه التكاملات. فإذا بدأنا بالكانتور C_1 فإنه يمثل بالمعادلات الوسيطية.

$$z = x + oi, \; -R \leqslant x \leqslant R$$

ومن ذلك فإن:

$$(٢٤ - ٦) \; \ldots \int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x}}{1+e^{nx}}\, dx \equiv I_R$$

أما الكانتور الثاني C_2 فهو $z = R + yi$ و $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ وبالتالي فإن $dz = dy\, i$ فتصبح قيمة التكامل كما يلي:

$$\left| \int_{C_2} f(z)\, dz \right| \leqslant \int_{0}^{2\pi} \left| \frac{e^{R}\, e^{yi}}{1 + e^{nR}\, e^{nyi}}\, dy\, i \right|$$

وبما أن:

$$\left|1 + e^{nR} e^{nyi}\right| > \left|e^{nR} e^{nyi}\right| - 1 = e^{nR} - 1$$

وكذلك:

$$\left| i e^{R} e^{yi}\right| < e^{R}$$

فإن:

$$\left| \int_{C_2} f(z)\, dz\right| \leqslant \frac{2\pi e^{R}}{e^{nR} - 1} = \frac{2\pi}{e^{(n-1)R} - e^{-R}}$$

وبأخذ النهاية للطرف الأيمن عندما تزداد R دون توقف وبما أن $n > 1$ فإن:

$$(٦ - ٢٥) \ldots \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(٦ - ٢٦) \ldots \lim_{R\to\infty} \int_{C_4} f(z)\, dz = 0$$

يبقى أن نجد التكامل على المسار C_3 المعرف بالمعادلات:

$$z = x + 2\pi i, \; - R \leqslant x \leqslant R$$

وعليه فإن $dz = dx$ ومن ذلك ينتج أن:

$$(٦ - ٢٧) \ldots \int_{C_3} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x} e^{2\pi i}}{1 + e^{nx} e^{2n\pi i}}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{x}}{1+e^{nx}}\, dx \equiv I_R$$

وبتجميع النتائج ٦ ـ ٢٤، ٦ ـ ٢٥، ٦ ـ ٢٦ و٦ ـ ٢٧ ينتج لدينا بعد أخذ النهاية للطرفين عندما تزداد R بدون توقف أن:

$$\int_{C} f(z)\, dz = 2 \lim_{R\to\infty} I_R$$

وبالتالي فإن قيمة كوشي الرئيسة هي :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{nx}} \, dx = \lim_{R\to\infty} I_R = \frac{1}{2} \int_C f(z)\, dz$$

وبتطبيق نظرية كوشي للباقي فإن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{nx}} \, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$

وبما أنه يوجد فقط قطب بسيط واحد وهـو $z = \frac{\pi}{n}\, i$ في المنطقـة الداخليـة للكانتور C فإن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{nx}} \, dx = \pi i \cdot \text{Res}\left(f, \frac{\pi}{n}\, i\right)$$

وبما أن الدالتين e^x و $1 + e^{nx}$ تحليليتان وتحققان نتيجة ٤ فإن :

$$\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{n}\, i\right) = \frac{e^{\pi i/n}}{(1 + e^{nx})' \, (\pi i/n)}$$

$$= \frac{e^{(\pi i/n)}}{n e^{\pi i}} = \frac{-1}{n}\, e^{(\pi i/n)}$$

وبالتالي ينتج أن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{nx}} \, dx = - \frac{\pi i e^{\pi i/n}}{n}$$

تمارين ٦ - ٢

جد القيمة الرئيسة لكل من التكاملات التالية:

١ - $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\, dx$

٢ - $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+16}\, dx$

٣ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}\, dx$

٤ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2)^2+4}\, dx$

٥ - $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+8)^2}\, dx$

٦ - $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\, dx$

٧ - $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+16)^2}\, dx$

٨ - بين أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \quad a>0,\ b>0$$

٩ - بيِّن أن:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\, dx = \frac{-2\pi i\, e^{-a\pi i}}{1-e^{2\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$0 < a < 1$

وذلك بفرض أن الكانتور C مكون من أضلاع المستطيل الذي رؤوسه النقاط $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$ بالاتجاه الموجب.

١٠ - بنفس أسلوب التمرين السابق جد قيمة:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{\cosh \pi x}\, dx$$

وذلك بفرض أن الكانتور مكون من أضلاع المستطيل الذي رؤوسه النقاط:

$-R, R, R+i, -R+i$

على الترتيب بالاتجاه الموجب.

٦ ـ ٣ التكاملات المعتلة والتكاملات المثلثية:

نبحث نوعين من التكاملات: الأول يتضمن تكامل معتل لدالة تكون من جزئين دالة نسبية $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ودالة مثلثية، والنوع الثاني يتضمن دوالاً مثلثية فقط. بفرض أن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتا حدود بحيث إن الدالة $f = \frac{P}{Q}$ متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$. التكامل الأول من النوع:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos n x \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos nx \, dx, \quad \ldots (٦ - ٢٨)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin nx \, dx \quad \ldots (٦ - ٢٩)$$

وسنبين أن كلا التكاملين (٦ ـ ٢٨)، (٦ ـ ٢٩) يمكن أن توجد قيمتيهما في آن واحد وذلك بملاحظة أن $e^{nxi} = \text{cox}\, nx + i \sin n x$ تؤدي إلى:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{nxi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx \, dx \quad \ldots (٦ - ٣٠)$$

فيصبح التكامل (٦ ـ ٢٨)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx \, dx = \text{Re.} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{nxi} dx \right) \quad \ldots (٦ - ٣١)$$

وكذلك يصبح التكامل (٦ ـ ٢٩)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx \, dx = \text{Im} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{nxi} dx \right) \quad \ldots (٦ - ٣٢)$$

لذلك علينا أن نبحث عن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل (٦ ـ ٣٠)

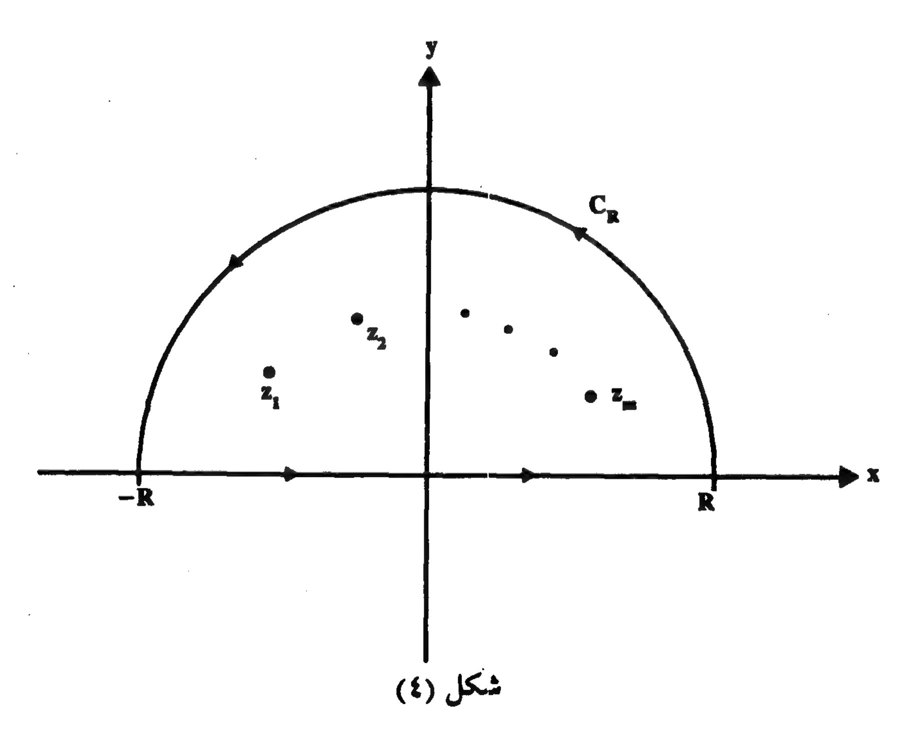
$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{nxi} dx$$

فإذا فرضنا أنه لا يوجد أقطاب للدالة f واقعة على خط الأعداد الحقيقية (أي أن $Q(x) \neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x) لتكون جميع أقطاب الدالة f واقعة إما في النصف الأعلى أو النصف الأسفل من المستوي، فإذا فرض أن المسار C مكون من جزئين: نصف الدائرة العلوي C_R التي نصف قطرها R والقطعة المستقيمة التي تصل بين R و R- بالاتجاه الموجب بحيث إن R تكفي لأن تكون جميع أقطاب الدالة f واقعة في المنطقة الداخلية للكانتور C كما يبين الشكل - ٤ -.

وبتطبيق نظرية كوشي للباقي فإن:

$$\int_C f(z)\, e^{nzi}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\,(g, z_k) \equiv I,$$

$$g(z) = f(z)\, e^{nzi}$$



شكل (٤)

حيث إن $z_1, z_2, \ldots, z_m$ تمثل أقطاب الدالة f في النصف العلوي من المستوي المركب.

ومن ذلك (وبما أن $C = C_R + [-R, R]$) ينتج :

$$I = \int_C f(z)\, e^{nzi}\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{nxi}\, dx + \int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz$$

وبما أن الطرف الأيسر لا يعتمد على R فإن أخذ النهاية للطرفين عندما تزداد R بدون توقف ينتج :

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{nxi}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz$$

فإذا تحقق أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz = 0$$

فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{nxi}\, dx$$

موجودة وبالتالي فإن:

$$(٦ - ٣٣) \; \ldots \; \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{nxi}\, dx = I = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\,(g, z_k)$$

حيث إن $z_1, z_2, \ldots, z_m$ أقطاب الدالة

$$g(z) = f(z)\, e^{inz}$$

النظرية التالية تبينّ الشروط التي تجعل:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz = 0$$

نظرية ٨:

إذا كانت $Q(x) \neq 0$ لكل عدد حقيقي x، وتحقق الشرط

$$\deg Q \geqslant 1 + \deg P$$

حيث إن: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz = 0,\ n > 0. \quad \ldots\ (٦ - ٣٤)$$

البرهان:

بالاستفادة من برهان نظرية ٦ وبما أن:

$$\deg Q \geqslant 1 + \deg P$$

فإنه يوجد عدد حقيقي موجب وثابت K يحقق

$$|f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leqslant \frac{K}{R}$$

ومن ذلك وبفرض أن z تقع على C_R حيث أن $z = Re^{ti}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ فإن:

$$\left|f(z)\, e^{nzi}\right| \leqslant \frac{K}{R} \left| e^{-nR \sin t}\, e^{inR \cos t} \right|$$

$$\leqslant \frac{K}{R}\, e^{-nR \sin t},\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

فيصبح التكامل (٦ - ٣٤)

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, e^{nzi}\, dz\right| \leqslant K \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{R}\, e^{-nR \sin t}\, Rie^{ti}\, dt \right| \quad \ldots\ (٦ - ٣٥)$$

$$\leqslant K \int_0^{\pi} e^{-n R \sin t}\, dt$$

ولإنهاء البرهان نبحث عن قيمة تحد التكامل على الطرف الأيمن من هذه المتباينة الأخيرة، ومن خصائص الدالة $\sin t$ أنها تحقق المتباينة:

$$\sin t \geqslant h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

حيث إن $h(t)$ يمثل الخط المستقيم الواصل بين (0,0) و $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ لذلك فإن

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\, t$$

أي أن:

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\ t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

وبالاستفادة من تماثل $\sin t$ حول $t = \frac{\pi}{2}$ فإن:

$$\int_0^\pi e^{-nR\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-nR\sin t}\,dt$$

$$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-2nRt/\pi}\,dt$$

$$\leqslant \frac{-\pi}{nR}\,[e^{-nR} - 1]$$

ومن ذلك فإن:

$$\int_0^\pi e^{-nR\sin t}\,dt \leqslant \frac{\pi}{nR}\,[1 - e^{-nR}]$$

وبالتعويض في (٦ ـ ٣٥) نحصل على:

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,e^{nzi}\,dz\right| \leqslant \frac{K\pi}{nR}\,[1 - e^{-nR}]$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما تزداد R بدون توقف فإن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,e^{nzi}\,dz = 0$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

ونكون بهذا كذلك قد أثبتنا النظرية التالية.

نظرية ٩:

إذا كانت $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ بحيث إن:

$$\deg Q \geqslant 1 + \deg p$$

وكانت $Q(x) \neq 0$ لكل عدد حقيقي x فإن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{nxi}\, dx$ موجودة وهي:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{nxi}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(g, z_k) \quad \ldots \quad (٦ - ٣٦)$$

حيث إن $z_1, z_2, \ldots, z_m$ تمثل أقطاب الدالة $g(z) = f(z)\, e^{nzi}$ الواقعة في النصف العلوي من المستوي المركب.

مثال ٧:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$$

الحـل:

بما أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بواحد على الأقل وكذلك لا يوجد أصفار حقيقية للمقام فإن شروط النظرية السابقة متحققة مما يؤكد أن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{xi}}{(x^2 + 1)^2}\, dx$$

موجودة وهي:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{xi}}{(x^2 + 1)^2}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\,(g, z_k)$$

حيث إن $z_1, z_2, \ldots z_m$ هي أقطاب الدالة:

$$g(z) = \frac{ze^{zi}}{(z^2 + 1)^2}$$

الواقعة في النصف العلوي من المستوى المركب.

وبفرض أن $(z^2+1)=0$ فإنه يوجد قطب من الدرجة 2 لهذه الدالة هو i لذلك تكون:

$$\text{Res}\,(g, i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\, g(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{zi}}{(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(z+i)^2\left\{zie^{zi} + e^{zi}\right\} + ze^{zi}\cdot 2\,(z+i)}{(z+i)^2}$$

$$= \frac{-4\,e^{-1}}{16} = \frac{-1}{4e}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\, dx = \text{Im.}\left\{2\pi i\ \frac{-1}{4e}\right\}$$

$$= \frac{-\pi}{2e}$$

لاحظ كذلك أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = 0$$

أعط تفسيراً لذلك.

مثـال ٨:

جد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

الحــل:

بما أن درجة كثيرة الحدود في المقام أكبر من درجة كثيرة الحـدود في البسط ولا يوجد أصفار حقيقية لكثـيرة الحدود في المقـام فإن الـدالة تحقق شروط نـظرية ٩ لذلك فإن قيمة كوشي الرئيسية للتكامل.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

موجودة.

ولإيجاد تلك القيمة نجد أصفار المقام وبفرض أن: $z^2 + 2z + 2 = 0$ فإن:

$$z = \frac{-2 + (4 - 8)^{1/2}}{2}$$

وبالتالي يكون الجذر أن الأول والثاني هما:

$$z_1 = -1 + i$$
$$z_2 = -1 - i$$

من الواضح أن القـطب الذي يقـع في النصف العلوي من المستوي المـركب هو $z_1 = -1 + i$ وبالتالي فإن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^2 + 2x + 2}\, dx = 2\pi i.\ \text{Res}\,(g, z_1)$$

وبما أن z_1 تمثل قطباً بسيطاً للدالة g فإن:

$$\text{Res}\,(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, g(z)$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1)\, e^{zi}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{e^{z_1 i}}{z_1 - z_2} = \frac{e^{-1-i}}{2i}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \text{Re}\left\{\pi e^{-1} (\cos 1 - i \sin 1)\right\}$$

$$= \frac{\pi \cos 1}{e}$$

وبالمثل نستنتج أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \text{Im.}\left\{\pi e^{-1} (\cos 1 - i \sin 1)\right\}$$

$$= \frac{-\pi \sin 1}{e}$$

وهنـاك تكامـلات ليست معتلة تتكون الـدوال المكاملة فيهـا من دوال مثلثية ليست سهلة الحـل بالـطرق التقليديـة المعروفـة للتكامـل تساهم نـظرية كـوشي للباقي بإيجاد قيم لهذه التكاملات من مثل:

$$(٣٧ - ٦) \quad \ldots \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt$$

ولايجاد قيمة التكامل (٦ - ٣٧) تحـول الدالـة $F(\cos t, \sin t)$ الى دالة $f(z)$ وذلك بفرض أن التكامل يمثل تكامل المسار عـلى الكانتور $C: z = e^{ti}, 0 \leq t \leq 2\pi$

وهو دائرة الوحدة وبما أن $\bar{z} = e^{-ti}$ فإن:

$$(٣٨ - ٦) \quad \ldots \cos t = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \sin t = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

وبالتعويض من (٦ - ٣٨) في (٦ - ٣٧) نحصل على:

$$(٣٩ - ٦) \quad \ldots \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt = \frac{1}{i} \int_C \bar{z}\, f(z)\, dz$$

حيث إن:

$$(٦ - ٤٠) \ldots f(z) = F(\cos t, \sin t)$$
$$= F\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right)$$

ثم نطبق نظرية كوشي للباقي لإيجاد قيمة التكامل في الطرف الأيمن من (٦ - ٣٩).

مثال ٩:

جد قيمة التكامل:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos t}\, dt,\ 0 < |a| < 1$$

الحل:

نجد قيمة $f(z)$ وهي:

$$f(z) = \frac{1}{1+a\cos t} = \frac{1}{1+a\frac{1}{2}(z+\bar{z})}$$

وبما أن z التي تقع على دائرة الوحدة C تحقق $\bar{z} = \frac{1}{z}$ فإن:

$$f(z) = \frac{2z}{az^2 + 2z + a}$$

ليصبح التكامل بالصيغة التالية وذلك حسب (٦ - ٣٩)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+a\cos t} = \int_C \frac{\bar{z}\, f(z)}{i}\, dz$$

ومن ذلك فإن:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos t}\,dt = \frac{2}{ai}\int_c \frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}\, z + 1}\,dz$$

$$= \frac{4\pi}{a}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(g, z_k)$$

حيث إن: $z_1, z_2, \dots, z_n$ أقطاب الدالة $g(z) = 1/\left(z^2 + \frac{2}{a}\, z + 1\right)$.

الأقطاب هي:

$$z = \frac{-2 + (4 - 4a^2)^{1/2}}{2a}$$

حيث إن:

$$z_1 = \frac{1}{a}\left(-1 + \sqrt{1-a^2}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{a}\left(-1 - \sqrt{1-a^2}\right)$$

لأن الجذور حقيقية بسبب كون $|a| < 1$. ولمعرفة الأقطاب التي تقع في المنطقة الداخلية للكانتور نبحث عن الأقطاب التي تحقق $|z| < 1$ ولذلك نجد حاصل ضرب الجذرين z_1, z_2 وهو:

$$z_1 z_2 = 1$$

وبما أن:

$$|z_2| = \left| \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{a} \right| > 1$$

فإن:

$$|z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1$$

ومن ذلك فإن z_1 فقط يقع في المنطقة الداخليـة للكانتـور. وبما أن z_1 قـطب بسيط للدالة فإن:

$$\text{Res}\,(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}$$

وعليه فإن:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

تمارين ٦ ـ ٣

١ ـ جد قيمة كوشي الرئيسة للتكاملات التالية:

أ ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a x}{x^2 + 4} dx$$

ب ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

جـ ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$$

د ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin a x}{x^2 + 9} dx, a > 0$$

هـ ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos a x}{x^2 + 2x + 2} dx, a > 0$$

و ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5} dx$$

ز ـ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x + a)^2 + b^2} dx, b > 0$$

٢ ـ بفرض أن الدالة f تحقق شروط نظرية ٧ وكانت الدالة معرفة بالمساواة:

$g(z) = \pi f(z) \cot (\pi z)$

فبرهن أن:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}\,(g, z_k) \quad \ldots \quad (٦ - ٤١)$$

حيث إن z_k تمثل قطباً للدالة f ,$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$.

اقتراح:

أ ـ بين أن $f(k) = \text{Res}\,(g, k)$ لكل عدد صحيح k.

ب ـ ونفرض أن الكانتور C_R مكون من أضلاع المربع الذي رؤوسه

$$(R + 1/2)(-1 \pm i), (R + 1/2)(+1 \mp i)$$

بالاتجاه الموجب بين أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\, dz = 0$$

بعد أن تبين أن $\pi \cot \pi z$ محدودة بعدد موجب ثابت.

جـ ـ ثم بالاستفادة من الخطوتين السابقتين بين أن:

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k=-R}^{R} f(k) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}\,(g, z_k)$$

حيث إن z_k قطب الدالة f لكل عدد صحيح k.

٣ ـ تسمى الصيغة (٦ ـ ٤١) في التمرين السابق صيغة المجموع، بالاستفادة منها برهن ما يلي:

أ ـ $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \pi \coth \pi$$

وافرض أن $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

ب ـ $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} = \pi^2$$

ملاحظة: المساواة (٦ ـ ٤١) تبقى صواباً إذا فرض أنه يوجد أقطاب للدالة f عند أي عدد حقيقي.

٤ ـ جد قيمة التكاملات التالية وذلك بتطبيق نظرية كوشي للباقي

أ ـ $$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt$$

لاحظ أنه باستخدام العلاقة المثلثية $\cos t = \cos(2\pi - t)$ يمكن إثبات أن:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt$$

ب ـ $$\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 4 \sin t}\, dt$$

جـ ـ $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2 \cos t)^2}\, dt$$

د ـ $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a + b \cos t}\, dt$$

وبفرض أن $a > |b| > 0$.

هـ ـ $$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 + 4 \cos t}\, dt$$

٥ ـ بيِّن أن:

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\, dt = \frac{2\pi\,(2n)!}{2^n\,(n!)^2}$$

حيث إن n عدد صحيح موجب.

٦ - بين أن:

$$\int_0^\pi \frac{1}{a\cos^2 t + b\sin^2 t}\, dt = \frac{\pi}{ab}, \quad a, b, > 0$$

٧ - بيِّن أن:

$$\int_0^\pi \frac{1}{a\sin t + b\cos t + c}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - (a^2+b^2)}}$$

لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c تحقق $a^2 + b^2 < c^2$.

٨ - بيِّن أن:

$$\int_0^\pi e^{\cos t} \cos (nt - \sin t)\, dt = \frac{\pi}{n!}$$

و n عدد صحيح موجب.

٩ - بيِّن أن:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t\, dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{2a^2 \pi}{1 - a^2}$$

وحيث إن $|a| < 1$.

١٠ - برهن أن:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos (2ax)\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\; e^{-a^2}$$

اقتراح: جد قيمة تكامل الدالة e^{-z^2} على الكانتور الذي رؤوسه $-R, R, R+ai, -R+ai$ ثم جد النهاية عندما تزداد R بدون توقف ثم عوض بالحقيقة المعروفة التالية:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

٦ ـ ٤ التكامل على كانتور مثلّم (مسنّن)

في البندين الثاني والثالث بحثنا في التكامل المعتل الذي تكون إحدى نهايتي التكامل أو كلاهما لا نهائية سلباً أو إيجاباً. وفي هذا البند نبحث النوع الثاني من التكامل المعتل وهو الذي تكون الدالة المكاملة فيه متزايدة بدون توقف عند الاقتراب من إحدى النقاط في فترة التكامل. وإذا كنا أكثر دقة نفرض أن الدالة f غير معرفة عند العدد x=c الذي يقع في الفترة [a, b]. فإن التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots \quad (٦ ـ ٤٢)$$

يسمى تكاملاً معتلاً، (لأن $f(c) = \infty$).

يمكن كتابة التكامل (٦ ـ ٤٢) كما يلي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

وحتى نجد قيمة (٦ ـ ٤٢) علينا أن نجد:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+} \int_a^{c-r} f(x)\,dx \quad \ldots \quad (٦ ـ ٤٣)$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+} \int_{c+r}^b f(x)\,dx \quad \ldots \quad (٦ ـ ٤٤)$$

فإذا وجدت النهاية في كل من (٦ ـ ٤٣) و(٦ ـ ٤٤) فإن التكاملين $\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^b f(x)\,dx$ تقاربيان وكذلك يكون التكامل (٦ ـ ٤٢) تقاربياً.

ومما يجدر الإشارة إليه أنه يمكن أن لا يكون التكامل (٦ ـ ٤٢)، تقاربياً بينما توجد النهاية

$$\lim_{r\to 0^+} \left(\int_a^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^b f(x)\,dx\right)$$

(نترك للقارىء التحقق من ذلك من خلال فرض أن $f(x) = \frac{1}{x}$)

ولذلك نتبنى ما يسمى قيمة كوشي الرئيسة للتكامل وهي :

$$\text{P.V.} \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$(٦ - ٤٥) \ldots \lim_{r\to 0^+} \left\{ \int_a^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^{b} f(x)\,dx \right\}$$

وبشكل أعم فإن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$(٦ - ٤٦) \ldots \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+}} \left\{ \int_{-R}^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^{R} f(x)\,dx \right\}$$

ولايجاد التكامل (٦ - ٤٦) نفرض أن $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

حيث إن $Q(x), P(x)$ كثيرتا حدود وإن :

$$\deg Q \geqslant 2 + \deg P$$

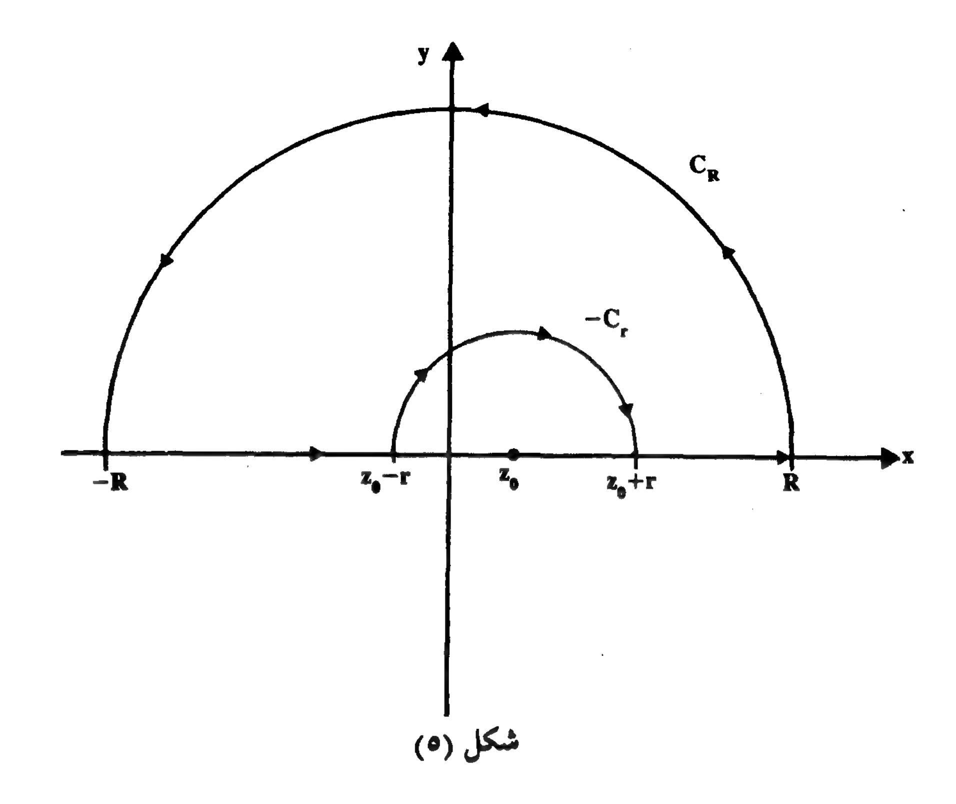
وإنه يوجد أصفار بسيطة حقيقية للدالة $Q(x)$ وللبساطة نفرض أنه يوجد صفر حقيقي بسيط واحد فقط z_0. نفرض أن المسار C مكون من نصف الدائرة العلوي $C_R: z = Re^{ti}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$ والقطعة المستقيمة $[-R, z_0 - r]$ ونصف الدائرة العلوي $C_r: z = z_0 + re^{ti}, 0 < t < \pi$ والقطعة المستقيمة $[z_0+r, R]$ في الاتجاه الموجب كما يبين الشكل التالي

وبما أن الدالة $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ تحليلية على C والمنطقة الداخلية له فإن نظرية كوشي كورسات تؤكد أن :

$$(٦ - ٤٧) \ldots \int_C f(z)\,dz = 0$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{z_0-r} f(x)\,dx + \int_{-C_r} f(z)\,dz + \int_{z_0+r}^{R} f(x)\,dx = 0$$



شكل (٥)

وبالتالي يكون:

$$\int_{R}^{z_0-r} f(x)\,dx + \int_{z_0+r}^{R} f(x)\,dx = \int_{C_r} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$$

فتكون قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل هي:

$$(٤٨ - ٦) \quad \ldots \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+}} \left\{ \int_{R}^{z_0-r} f(x)\,dx + \int_{z_0+r}^{R} f(x)\,dx \right\}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz$$

وباتباع أسلوب إثبات نظرية ٦ يمكن إثبات أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

لينتج لدينا

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to 0^+} \int_{C_r} f(z)\, dz \quad \ldots (٦ - ٤٩)$$

النظرية التالية تبين كيف نجد قيمة التكامل الأيمن في (٦ - ٤٩).

نظرية ١٠ :

إذا كانت $z=z_0$ قطباً بسيطاً للدالة f وكان C_r كانتوراً معرفاً بالمعادلة الوسيطية :

$$C_r: z = z_0 + re^{ti},\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

فإن :

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{C_r} f(z)\, dz = i\,(t_2 - t_1)\, \text{Res}\,(f, z_0) \quad \ldots (٦ - ٥٠)$$

البرهان :

بما أنه يوجد قطب بسيط للدالة f عند النقطة z_0

فإن :

$$f(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$$

ونفرض أن $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ فإن g تحليلية عند z_0 لذلك فإن :

$$\int_{C_r} f(z)\, dz = \alpha_{-1} \int_{C_r} \frac{1}{z-z_0}\, dz + \int_{C_r} g(z)\, dz \quad \ldots (٦ - ٥١)$$

وبما أن $g(z)$ تحليلية فإنها تكون محدودة على القرص $|z-z_0| < R$ وبفرض أن $r < R$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب K بحيث إن :

$$\left|\int_{C_r} g(z)\, dz\right| \leqslant K.L$$

حيث إن L طول القوس C_r وبما أن $L = (t_2 - t_1)\, r$ فإن:

$$\left|\int_{C_r} g(z)\, dz\right| \leqslant K\, (t_2 - t_1) r$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما تؤول r للصفر فإن:

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{C_r} g(z)\, dz = 0$$

ولكن وبفرض أن القوس C_r معرف بالمعادلة الوسيطية $z = z_0 + re^{ti}$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

وبالتالي فإن:

$$\int_{C_r} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \int_{t_1}^{t_2} \frac{rie^{ti}}{re^{ti}}\, dt$$

$$= i \int_{t_1}^{t_2} dt = i\, (t_2 - t_1)$$

وبالتعويض في (٦ ـ ٥١) ثم أخذ النهاية لطرفي المساواة ينتج أن:

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{C_r} f(z)\, dz = \alpha_{-1}\, i\, (t_2 - t_1)$$

$$= i\, (t_2 - t_1)\, \text{Res}\, (f, z_0).$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

فتصبح (٦ ـ ٤٩) بذلك كما يلي:

(٦ ـ ٥٢) . . . $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = i\, (t_2 - t_1)\, \text{Res}\, (f, z_0)$

وبما أن $t_1 = 0, t_2 = \pi$ في الكانتور C_r أعلاه فإن:

(٦ ـ ٥٣) . . . $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \pi i\, \text{Res}\, (f, z_0)$

نكون بذلك قد أثبتنا النتيجة التالية:

نظرية ١١:

إذا كانت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة نسبية بحيث إن:

$$\deg Q \geqslant 2 + \deg P$$

وإنه يوجد قطب بسيط للدالة f عند z_0 فقط فإن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ موجودة وتوجد بالمساواة (٦ - ٥٣). وإذا كانت $z_1, z_2, \ldots, z_n$ أقطاباً بسيطة حقيقية للدالة f فإن:

$$\text{(٦ - ٥٤)} \ldots \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$

مثـال ١٠:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-2)\,(x-1)}\, dx.$$

الحـل:

من الواضح أن الدالة $f(x) = \frac{x}{(x-2)\,(x-1)}$

تحقق شرط النظرية السابقة حيث أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بالعدد 2 وكذلك جذور المقام هي 2 ,1 وهي تمثل أقطاباً حقيقية بسيطة للدالة f وبتطبيق نظرية ١١ فإن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-2)\,(x-1)}\, dx = \pi i \sum_{k=1}^{2} \text{Res}\,(f, z_k)$$

وبما أن هذه الأقطاب بسيطة فإن:

$$\text{Res}\,(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z-2)} = -1.$$

$$\text{Res}\,(f, 2) = \lim_{z \to 2} \frac{z}{(z-1)} = 2.$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx = \pi i.$$

وإذا كان التكامل المعتل لدالة مكـونة من دالـة مثلثية $\sin x$ و $\cos x$ وأخـرى نسبية $\frac{P(x)}{Q(x)}$ فإن النتيجة التالية تبيِّن الوضع.

نظرية ١٢: إذا كانت:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x, g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x$$

بحيث إن:

$$\deg Q \geqslant 1 + \deg P$$

وكـانت $z_1, z_2, \ldots, z_n$ أقطاباً حقيقية (أي تقـع عـلى خط الأعـداد الحقيقي) بسيطة للدالة g, f فإن قيمة كوشي الرئيسة للتكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi} dx$$

هي:

$$(٥٥ - ٦) \ldots P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi} dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} Res(h, z_k)$$

حيث إن:

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi}$$

وكذلك:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x \, dx$$

$$(٥٦ - ٦) \ldots \quad = Re. \left\{P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi} dx\right\}.$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x \, dx$$

$$(٥٦ - ٦) \ldots \qquad = \text{IM.} \left\{ \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi} \, dx \right\}$$

يمكن استخلاص برهان لهذه النظرية من برهان كل من نظرية ٩ ونظرية ١٠ ونتركه تمريناً للقارىء.

مثـــال ١١:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكاملات المعتلة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 1} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 1} dx$$

الحـــل:

من السهل ملاحظة أن الدوال المكـاملة تحقق شروط النظريـة السابقـة وعليه وبما أن الأقطاب $1, 1-$ بسيطة فإن:

$$\text{Res}(h, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) h(z)$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{ze^{zi}}{z+1} = \frac{1}{2} e^{-i}$$

وبالمثل فإن:

$$\text{Res}(h, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{ze^{zi}}{z+1} = \frac{1}{2} e^{i}$$

فتكون قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المطلوب هي:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{xi}}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi i}{2} (e^{i} + e^{-i})$$

$$= \pi i \cos 1$$

وبالتالي فإن:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 1} dx = Re. \left\{P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{xi}}{x^2-1} dx\right\}$$
$$= 0$$

بينما:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 1} dx = Im. \left\{P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{xi}}{x^2-1} dx\right\}$$
$$= \pi \cos 1.$$

أما أعم الحالات التي يمكن أن نواجهها هي أن يتواجد أقطاب حقيقية بسيطة وأخرى مركبة في النصف العلوي من المستوي أو السفلي منه. وعندها نحتاج الى النتيجة التالية: -

نظرية ١٣:

بفرض أن $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ أو $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{xi}$

حيث إن: $\deg Q \geqslant 2 + \deg P$

في الحالة الأولى و $\deg Q \geqslant 1 + \deg P$

في الحالة الثانية وإذا فرض أن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ أقطاب للدالة f واقعة في النصف العلوي من المستوي المركب وأن $w_1, w_2, \ldots, w_n$ أقطاب بسيطة للدالة f تقع على خط الأعداد الحقيقية فإن قيمة كوشي الرئيسة للتكاملات المعتلة هي:

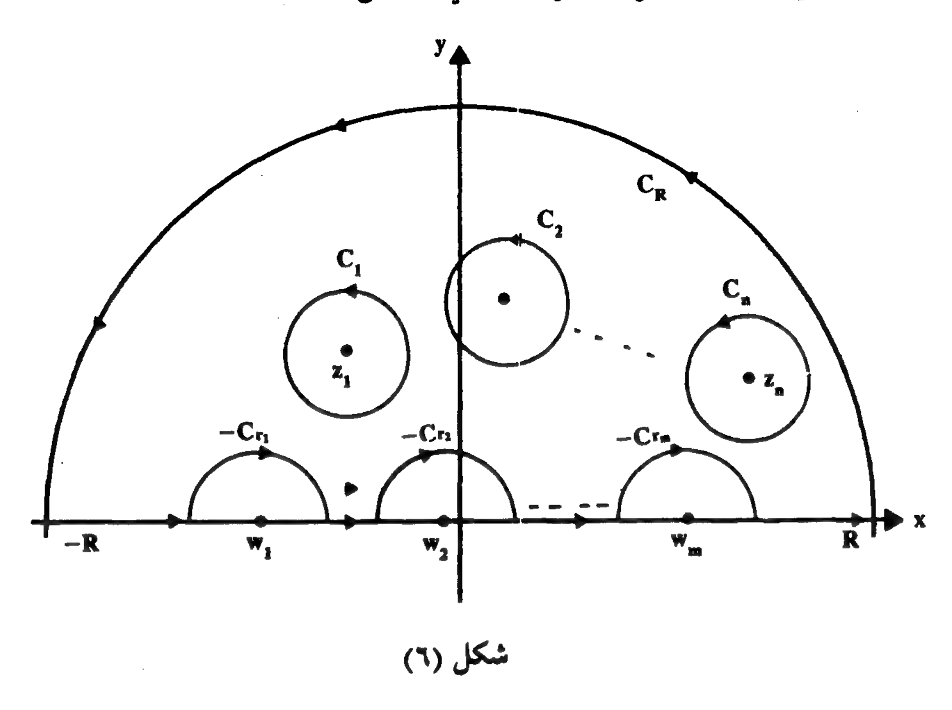
$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$
$$(٥٧ - ٦) \quad \ldots = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,(f, z_k) + \pi i \sum_{k=1}^{m} Res\,(f, w_k).$$

البرهان:

مماثل لبرهان نظريتي ١١، ١٢ مع الأخذ بعين الاعتبار أن (٦ - ٤٧) لا تأخذ القيمة صفر بل

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,(f, z_k)$$

حيث إن المسار C هو الكانتور المبيّن في الشكل ـ ٦ ـ:



شكل (٦)

$$C = C_R - C_{r_1} - C_{r_2} - \dots - C_{r_m}$$

لاحظ أن الحافة السفلى من الكانتور C كأنها مسننة أو مثلمة ومن هنا جاءت التسمية بالكانتور المثلم.

مثـال ١٢:

جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3-8}\, dx$$

الحـل:

نجد أولاً قيمة كوشي الرئيسية للتكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^3-8}\, dx$$

ومن الواضح أن الدالة المكاملة:

$$f(x) = \frac{e^{xi}}{x^3-8}$$

تحقق شروط النظرية ١٣، وعليه فإن:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^3-8}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\,(f, w_k)$$

وبإيجاد أصفار المقام للدالة نجد الأقطاب لها وهي

$$x = 8^{1/3}$$

ومن ذلك فإن $w_1 = 2$ يمثل القطب الحقيقي البسيط وكذلك:

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

تمثل أقطاباً بسيطة للدالة ولكن واحداً منها فقط في النصف العلوي من المستوي لذلك فإن:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^3-8}\, dx = 2\pi i \,\text{Res}\,(f, z_1) + \pi i \,\text{Res}\,(f, w_1)$$

وبما أن هذه الأقطاب بسيطة فإن:

$$\text{Res}\,(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{zi}}{(z-2)\,(z-z_2)}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{3}}\, e^{-i}}{-6-6\sqrt{3}\; i}$$

ومن ذلك ينتج :

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{-e^{-\sqrt{3}}}{24}\{(\cos 1 - \sqrt{3}\sin 1) - i(\sin 1 + \sqrt{3}\cos 1)\}$$

وكذلك فإن :

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to 2} \frac{e^{zi}}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= \frac{e^{2i}}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{12}(\cos 2 + i \sin 2)$$

وعليه فإن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^3 - 8} dx = \left(\frac{-e^{-\sqrt{3}}\pi}{12}(\sin 1 + \sqrt{3}\cos 1) - \frac{\pi}{12}\sin 2\right)$$

$$+ i\left(\frac{-e^{-\sqrt{3}}}{12}(\cos 1 - \sqrt{3}\sin 1) + \frac{\pi}{12}\cos 2\right)$$

وبأخذ الجزء الحقيقي للطرفين نستنتج أن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^3 - 8} = \frac{-\pi}{12}(e^{-\sqrt{3}}(\sin 1 + \sqrt{3}\cos 1) + \sin 2)$$

وبأخذ الجزء التخيلي للطرفين فإن :

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3 - 8} dx = \frac{-\pi}{12}(e^{-\sqrt{3}}(\cos 1 - \sqrt{3}\sin 1) - \cos 2)$$

تمارين ٦ ـ ٤

جد قيمة كوشي الرئيسة لكل من التكاملات المعتلة التالية:

١ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3-1}\, dx$

٢ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$

٣ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-2)}\, dx$

٤ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

٥ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2xi}}{x-2}\, dx$

٦ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x\,(x+1)}\, dx$

٧ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 4x + 3}\, dx$

٨ ـ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^3 + 8}\, dx$

٩ ـ بيِّن أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi$$

١٠ ـ $\int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$

١١ ـ برهن أن:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin a x}{x\,(x^2 + b^2)}\, dx = \frac{\pi}{2b^2}\,(1 - e^{-ab})$$

لكل $b > 0, a > 0$.

١٢ ـ جد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx$$

اقتراح: استفد من المتطابقة $e^{3xi} = (\cos x + i \sin x)^3$

١٣ - بيِّن أن:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - a^2}\, dx = -\frac{\pi}{a} \sin a$$

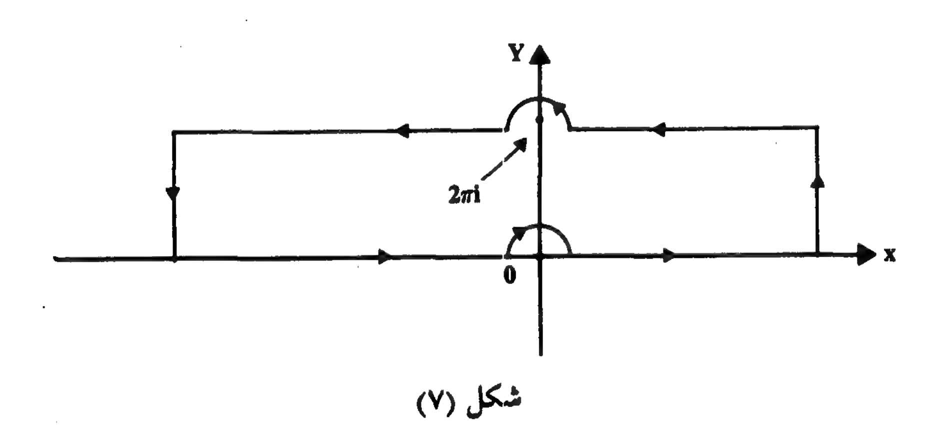
١٤ - جد قيمة:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x\,(x^2+4)}\, dx$$

١٥ - جد قيمة:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x - 1}\, dx, \quad 0 < a < 1$$

اقتراح: افرض أن المسار C كما في الشكل (٧)



شكل (٧)

١٦ - بيِّن أن

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx = \int_0^{\infty} \sin x^2\, dx = \sqrt{(\pi/8)}$$

وذلك بفرض أن:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وإيجاد تكامل الدالة $e^{z^2 i}$ على المسار المكوَّن من حدود القطاع

$$0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$$

ثم خذ النهاية عندما R تزداد بدون توقف.

٦ ـ ٥ التكامل حول نقاط الفرع للدوال متعددة القيمة

سنبحث في هذا البند تكامل الدوال متعددة القيمة من النوع

$$(٥٨ ـ ٦) \quad \ldots \quad f(z) = \frac{z^a P(z)}{Q(z)}, \quad 0 < a < 1$$

إن الدوال متعددة القيمة لها وضع خاص ذلك أنه يوجد لها فصل الفرع وكذلك نقطة الفرع وهي النقاط المتفردة للدالة متعددة القيمة لذلك نحتاج مزيداً من الدقة في اختيار الفرع المناسب لاجراء التكامل.

وبالنسبة للدالة متعددة القيمة في (٦ ـ ٥٨) نعتمد الفرع التالي

$$z^a = |z|^a e^{a\theta i}, \qquad 0 < \theta < 2\pi, \qquad |z| > 0$$

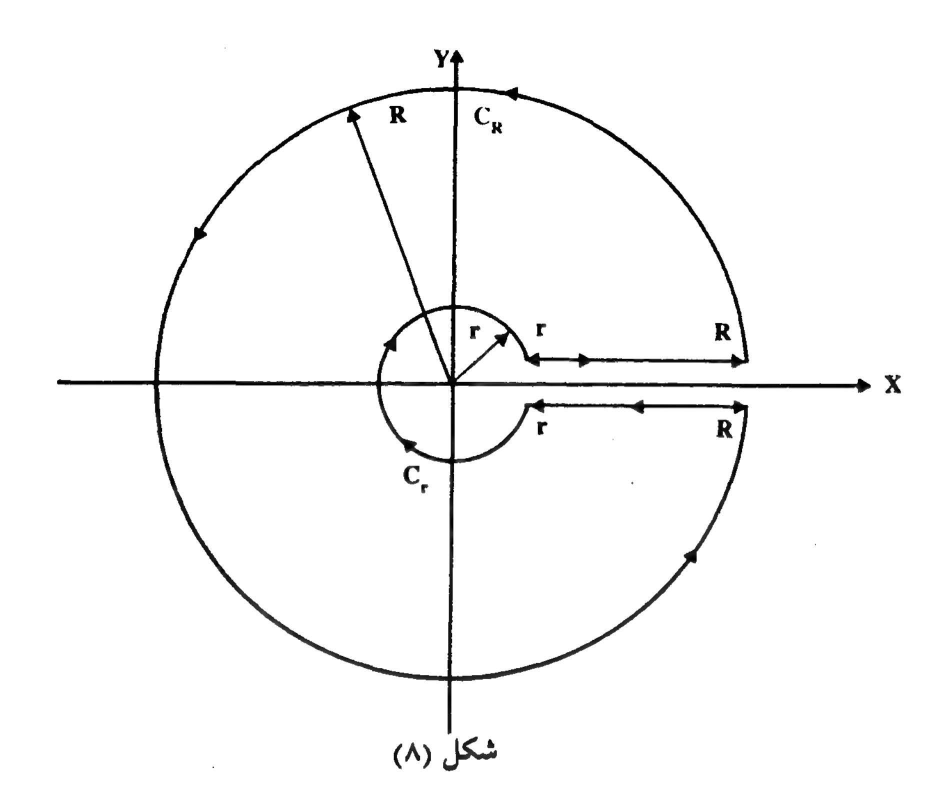
وبذلك يكون الشعاع $\theta=0$ هو فصل الفرع لهذه الدالة وكذلك النقطة $z=0$ هي نقطة الفرع لها. والهدف هنا هو إيجاد قيمة كوشي الرئيسة للتكامل المعتل

$$(٥٩ ـ ٦) \quad \ldots \quad \int_0^\infty \frac{x^a P(x)}{Q(x)} dx$$

بحيث إن $\deg Q \geqslant 2 + \deg P$ وأنه يوجد على الأكثر صفر بسيط للدالة $Q(x)$. لذلك نفرض أن مسار التكامل C مكون من الدائرة التي نصف قطرها R ودائرة نصف قطرها r :$0 < r < R$ والقطعة المستقيمة الواصلة بين r, R باتجاهين متخالفين كما يبين الشكل ـ ٨ ـ حتى نستطيع تجنب نقطة وفصل الفرع.

فإذا كانت النقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ تمثل أقطاباً للدالة f ليست حقيقية موجبة وليست صفراً فإن نظرية كوشي للباقي تؤكد أن:

$$I \equiv \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$



شكل (٨)

وبتجزئة التكامل في الطرف الأيسر على المسار C حيث إن:

$C = C_R - C_r + [r, R] + [R, r]$ ينتج أن

$$I = \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_r^R f(z)\,dz - \int_r^R f(z)\,dz$$

لاحظ أن تكامل الدالة f على الكانتور [r, R] مختلف عن تكامل الدالة على [r, R] – وذلك لاختلاف سعة z في الدالة متعددة القيمة حيث إذا كانت z عدداً حقيقياً موجباً واقتربنا من العدد z من النصف العلوي للمستوي فإن:

$$z = |z|\, e^{\theta i} = |z|$$

لأن $\theta = \arg z = 0$ ولكن إذا اقتربنا من العدد z من النصف السفلي للمستوي المركب فإن:

$$z = |z|\, e^{\theta i} = |z|\, e^{2\pi i}$$

لأن $\theta = \arg z = 2\pi$ ولذلك فإن التكامل يأخذ القيمة التالية :

$$I = \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{z^a P(z)}{Q(z)}\,dz - \int_r^R \frac{z^a e^{2\pi ai} P(z)}{Q(z)}\,dz$$

$$= \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z)\,dz + (1 - e^{2\pi ai}) \int_r^R \frac{z^a P(z)}{Q(z)}\,dz$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما تؤول r الى 0^+ وعندما تؤول R الى ∞ كل على حدة فإن :

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz - \lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} f(z)\,dz +$$

$$+ (1 - e^{2\pi ai}) \lim_{\substack{r\to 0 \\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{x^a P(x)}{Q(x)}\,dx$$

من الواضح أن :

$$(٦٠ - ٦) \ldots \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{x^a P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{\substack{r\to 0 \\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{x^a P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{1 - e^{2\pi ai}} \{ I + \lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz$$

حتى توجد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل المعتل يجب أن يتحقق :

$$(٦١ - ٦) \ldots \lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0 ،$$

$$(٦٢ - ٦) \ldots \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$$

وبذلك نحصل على :

$$(٦٣ - ٦) \ldots \text{P.V.} \int_0^\infty \frac{x^a P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ai}} \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k)$$

ونترك تفصيلات ذلك للأمثلة التالية :

مثــال ١٣ :

جد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل المعتل

$$\int_0^\infty \frac{x^a\, dx}{x\,(x+2)} \quad , 0 < a < 1$$

الحـــل :

مما تقدم نستنتج أن :

$$P.V. \int_0^\infty \frac{x^a}{x\,(x+2)}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi a i}}\ \text{Res}\,(f, -2)$$

وبما أن 2 − قطب بسيط للدالة فإن :

$$\text{Res}\,(f, -2) = \lim_{z \to -2}\ (z+2)\, f(z)$$

$$= \lim_{z \to -2}\ \frac{z^a}{z} = (-2)^{a-1}$$

وعليه فإن :

$$P.V. \int_0^\infty \frac{x^a}{x\,(x+2)}\, dx = \frac{-\pi i\,(-2)^a}{1 - e^{2\pi a i}}$$

$$= \frac{\pi i\, e^{a\,(\ln 2 + \pi i)}}{e^{2\pi a i} - 1} = \frac{2^a\, \pi\, i}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}}$$

$$= \frac{2^{a-1}\, \pi}{\sin \pi a}$$

هذا يحقق (٦ ـ ٦١) و (٦ ـ ٦٢). ومن أجل أن نرى ذلك نقول إن

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^a\, dz}{z(z+2)} \right| \leqslant \frac{r^a\, 2\pi r}{r\,(r-2)} \leqslant \frac{2\pi r^a}{r-2}$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما تؤول r الى الصفر يتحقق (٦ ـ ٦١). وبالمثل فإن (نظرية ٧ تؤكد أن)

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^a\, dz}{z(z+2)} \right| \leqslant \frac{R^a\, 2\pi R}{R^2} \leqslant \frac{2\pi}{R^{1-a}}$$

وبما أن $1-a > 0$ فإن أخذ النهاية للطرفين عندما تؤول R الى ∞ ينتج لنا (٦ ـ ٦٢).

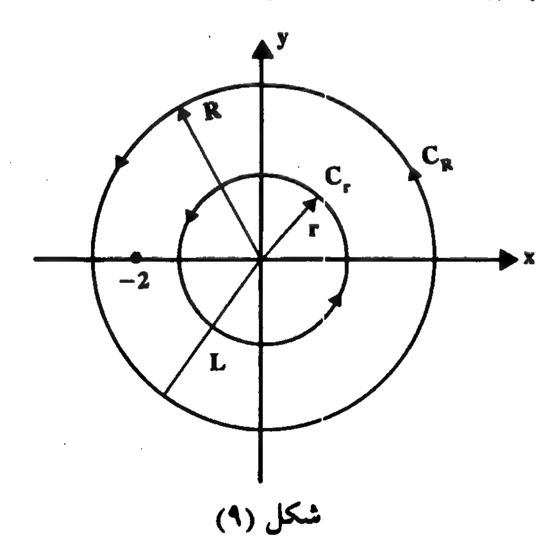
يمكن أن يوجد التكامل مباشرة بتطبيق نظرية كوشي للباقي إذا أُحسن اختيار الكانتور C، كما يبين ذلك المثال التالي:

مثال ١٤:

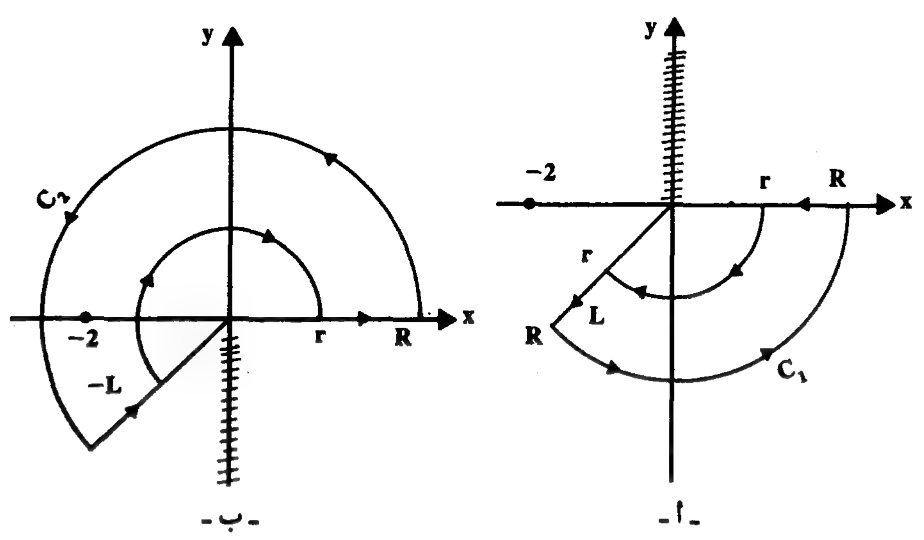
جد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}\, dx$

الحل:

إذا كانت C_r و C_R دائرتين بحيث إن $r < 2 < R$ فإنه يمكن أن نقسم الكانتور المكون منهما الى قسمين باختيار وصلة مناسبة نتخلص بها من فصل الفرع المناسب كما يبين الشكلان ـ ٩ ـ و ـ ١٠ ـ.



شكل (٩)



- أ -

الفرع المعتمد هنا هو:

$$g(z) = \frac{z^{-a}}{z+2}, \ |z| > 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$$

- ب -

الفرع المعتمد هنا هو:

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+2} \ |z| > 0,$$

$$-\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

شكل (١٠)

من الواضح أن الدالة g تحليلية على مجال يحتوي الكانتور C_1 وبالتالي فإن:

$$(٦ - ٦٤) \ \ldots \int_{C_1} g(z)\,dz = 0$$

بينما يوجد قطب بسيط للدالة f(z) عند 2 − واقعاً في المنطقة الداخلية للكانتور C_2 وعليه فإن نظرية كوشي للباقي تؤكد أن:

$$(٦ - ٦٥) \ \ldots \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2) = I$$

كذلك فإن كلا الفرعين f و g تحليلي على القطعة المستقيمة L, L− وبالتالي فإن:

$$\int_{C_1} g(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_r} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz + $$

$$+ \int_r^R f(z)\,dz - \int_r^R g(z)\,dz$$

وبجمع (٦ - ٦٤) و(٦ - ٦٥) والتعويض في المساواة السابقة والأخذ بعين الاعتبار العلاقة بين الفرعين f و g ينتج أن:

$$I = \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z)\,dz - \int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx + \int_r^R \frac{e^{-2\pi ai}x^{-a}}{x+2}dx$$

$$= \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_r} f(z)\,dz + (e^{-2\pi ai} - 1)\int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx$$

وبأخذ النهاية عندما تؤول r الى صفر وعندما تؤول R الى ∞ كل على حده ينتج أن:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{-a}}{z+2}\,dz - \lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} \frac{z^{-a}}{z+2}\,dz +$$

$$+ (e^{-2\pi ai} - 1) \lim_{\substack{r\to 0 \\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx$$

وبالتحقق نجد أن:

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{-a}}{z+2}dz \right| \leqslant \frac{R^{-a}\,2\pi R}{R-2} < \frac{2\pi R}{(R-2)\,R^a}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{-a}}{z+2}dz = 0$$

وبالمثل فإن:

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^{-a}}{z+2}\,dz \right| \leqslant \frac{r^{-a}2\pi r}{2-r} = \frac{2\pi}{2-r}\,r^{1-a},$$

وبما أن $1 - a > 0$ فإن:

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} \frac{z^{-a}}{z+2}\,dz = 0$$

وهذا يؤكد أن:

$$P.V. \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}dx = \frac{I}{e^{-2\pi ai}-1} = \frac{2\pi i \, Res\,(f, -2)}{e^{-2\pi ai}-1}$$

وبما أن 2− قطب بسيط للدالة فإن:

$$\begin{aligned} Res\,(f, -2) &= \lim_{z\to-2} (z+2)\, f(z) \\ &= \lim_{z\to-2} z^{-a} = (-2)^{-a} \\ &= e^{-a \log(-2)} \\ &= e^{-a \ln 2} . \, e^{-a\pi i} \\ &= 2^{-a} e^{-a\pi i} \end{aligned}$$

وبالتعويض نستنتج أن:

$$P.V. \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}dx = \frac{2\pi i\, 2^{-a}\, e^{-a\pi i}}{e^{-2\pi ai}-1} = \frac{-\pi\, 2^{-a}}{\sin \pi a}$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثــال ١٥:

جد قيمة كوشي الرئيسية للتكامل المعتل. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx$

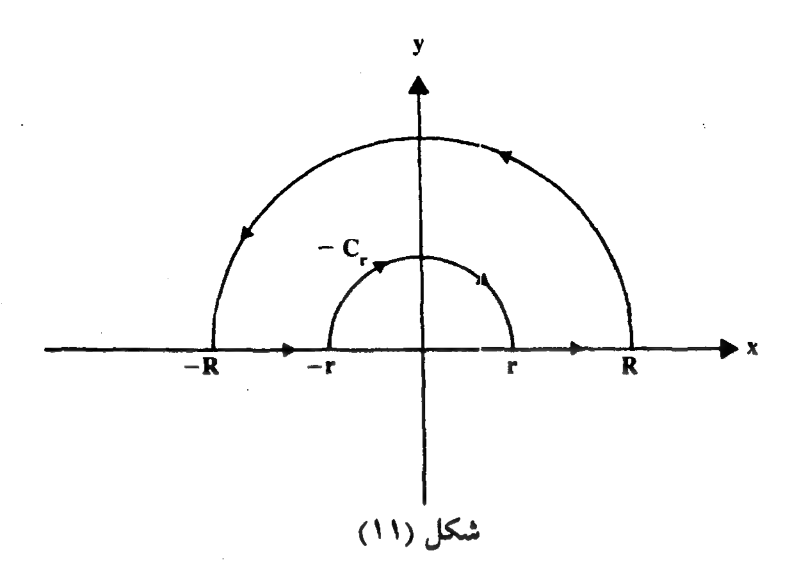
الحــل:

باختيار الفرع المناسب وهو:

$$Log\, z = \ln|z| + \theta i, \quad |z| > 0, \ \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

وبالتالي يكون فصل الفرع هو الشعاع $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ونقطة الفرع هي 0

وباختيار الكانتور C المكوّن من نصف الدائرة العلوي C_R ونصف الدائرة العلوي C_r والقطعة المستقيمة $[-R, -r]$ والقطعة المستقيمة $[r, R]$ بالاتجاه الموجب حيث إن: $0 < r < R$



شكل (١١)

وبتطبيق نظرية كوشي للباقي فإن:

$$\int_C \frac{\text{Log } z}{z^2 + 4} \, dz = 2\pi i \text{ Res } (f, 2i) = I$$

حيث إن $f(z) = \dfrac{\text{Log} z}{z^2 + 4}$، لاحظ أن القطب 2i واقع في المنطقة الداخلية لكانتور C. وعليه فإن:

$$I = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{C_r} f(z)\, dz + \int_{-R}^{-r} f(z)\, dz + \int_r^R f(z)\, dz$$

نترك للقارىء أن يبين أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = 0$$

ليستنتج أن:

$$2\pi i \text{ Res } (f, 2i) = \text{P.V.} \left\{\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln |x| + \pi i}{x^4 + 4} \, dx + \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 4} \, dx\right\}$$

علماً بأنه إذا وقعت x على خط الأعداد السالبة فإن $\text{Log } x = \ln |x| + \pi i$ ولكن إذا وقعت x على خط الأعداد الموجبة فإن $\text{Log } x = \ln x + oi$ وبالتالي بإيجاد Res (f, 2i) حيث إن 2i قطب بسيط للدالة فإن:

$$P.V. \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x|}{x^2+4} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx + i \int_{-\infty}^{0} \frac{\pi}{x^2+4} dx \right\} =$$

$$= 2\pi i \frac{\ln 2 + \frac{\pi}{2} i}{4i}$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{\pi^2}{4} i$$

وبتساوي الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية للمساواة السابقة فإن:

$$P.V. \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x|}{x^2+4} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \right\} = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

وبالاستفادة من التماثل (أي المساواة بين:

$$\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x|}{x^2+4} dx, \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \right.$$

فإن:

$$P.V. \left(2 \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

وبالتالي ينتج أن:

$$P.V. \left(\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \right) = \frac{\pi}{4} \ln 2$$

تمارين ٦ ـ ٥

جد قيمة كوشي الرئيسية لكل من التكاملات المعتلة فيما يلي:

١ ـ $\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{x+1}dx$

٢ ـ $\int_0^\infty \frac{1}{x^{2/3}(x+3)}dx$

٣ ـ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx$

٤ ـ $\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x^2+9}dx, 0 < a < 1$

٥ ـ $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx, 0 < a < 1$

٦ ـ $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx, a > 0$

٧ ـ $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2}dx, a > 0$

٨ ـ $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+b)^2}dx, -1 < a < 3, b > 0$

الفصل السابع

الدوال المطابقة (المشاكلة)

CONFORMAL MAPPINGS

الفصل السابع

الدوال المطابقة (المشاكلة)

Conformal Mappings

نتعرض في هذا الفصل لفكرتي الاستمرار التحليلي والدالة المطابقة. أما فكرة الاستمرار التحليلي فسنعرفها بأسلوب بسيط في البند الأول، أما البند الثاني فسيعرض تعريف الدالة المطابقة وبعض الخصائص العامة لها وكذلك بعض نتائجها.

إن أهمية الدوال المطابقة تكمن في وجود تطبيقات هندسية وفيزيائية كثيرة لها والتي سنعرض لها في البند ٥ أما البند الثالث فقد خصص لأمثلة هامة وخاصة للدالة المطابقة مثل الدالة مزدوجة الخطية. أما تحويل شوارتز كريستوفل فقد تم عرضه في البند ٤.

٧ ـ ١ الاستمرار التحليلي (Analytic Continuation)

قبل أن نعرف فكرة الاستمرار التحليلي بشكل مجرد يجدر بنا أن نقدّم لها بمثال ليسهل فهم هذه الفكرة. إذا فرضنا أن لدينا الدالة.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

فإنه يمكن أن نتبين أن نصف قطر التقارب لهذه الدالة (متسلسلة القوى) هو 1 وأن مجال تقاربها هو القرص المفتوح $|z| < 1$ وعلى هذا المجال فإن هذه الدالة عبارة عن المتسلسلة الهندسية:

$$(\text{١ - ٧}) \ldots f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \quad , \quad |z| < 1$$

وإذا بحثنا في الدالة $g(z)$ حيث

$$(\text{٢ - ٧}) \ldots g(z) = \frac{1}{1+z}$$

نجد أنها تحليلية لجميع قيم $z \neq -1$ لأنها غير معرفة عند $z=-1$ وبالمقارنة بين الدالتين (٧ - ١)، (٧ - ٢) نجد أنهما تتوافقان على المجال المفتوح $|z|<1$ وتختلفان خارجه في مثل هذه الحالة تسمى الدالة $g(z)$ **استمراراً تحليلياً للدالة f** عند أي نقطة $z \neq -1$ (أي على كل المستوي عدا $z=-1$) على أي مسار يصل بين أي نقطتين احداهما داخل المجال $|z| < 1$ والأخرى خارجه.

ولتبسيط الفكرة أكثر نعرفها على مرحلتين الأولى تسمى الاستمرار التحليلي البسيط والأخرى الاستمرار التحليلي على مسار C. الفكرة الأولى في التعريف التالي:

تعريف ١:

لنفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D وأن الدالة g تحليلية على المجال S فإن الدالة g تسمى استمراراً تحليلياً بسيطاً للدالة f الى المجال S اذا تحقق الشرطان:

أ - $S \cap D \neq \phi$

ب - $f(z) = g(z)$ لكل z في $S \cap D$

النظرية التالية تمثل إعادة صياغة للنظرية ٢٤ من الفصل الخامس.

نظرية ١:

اذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D بحيث إن $f(z) = 0$ لكل z في جوار (مفتوح) في المنطقة الداخلية للمجال D فإن $f(z) = 0$ لكل z في D.

البرهان:

نفرض أن z_0 نقطة في الجوار (المفتوح) N والواقع في المنطقة الداخلية للمجال D فإن $f(z_0)=0$ وبما أن f تحليلية على D فإن نظرية ٢٤ في الفصل الخامس تؤكد أنه إما أن تكون $f(z) = 0$ لكل z في D أو أن z_0 صفر معزول للدالة f وبما أن z_0 ليس صفراً معزولاً للدالة لكون $f(z) = 0$ لكل z في N فإن $f(z) = 0$ لكل z في D.

ومما تجدر الاشارة إليه أن النظرية السابقة تبين أن الاستمرار التحليلي لدالة ما إن وجدت فإنها تكون واحدة ووحيدة. أنظر التمرين (١).

مثال ١:

برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي البسيط أن:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

الحل:

لنفرض أن الدالة f معرَّفة بالمساواة التالية:

$$f(z) = \cos 2z$$

وهذه الدالة تحليلية لكل z في المستوي المركب وكذلك نعرف الدالة g بالمساواة

$$g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

وهي كذلك دالة تحليلية لكل z في المستوي المركب. ولكن من المعلوم من المثلثات الثانوية أن:

$$g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = f(x)$$

لكل عدد حقيقي x وبالتالي فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للدالة f

وبالاستفادة من النظرية السابقة فإن $f=g$ لكل عدد حقيقي يؤكد بأن $f(z) = g(z)$ لكل عدد مركب أي أن :

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

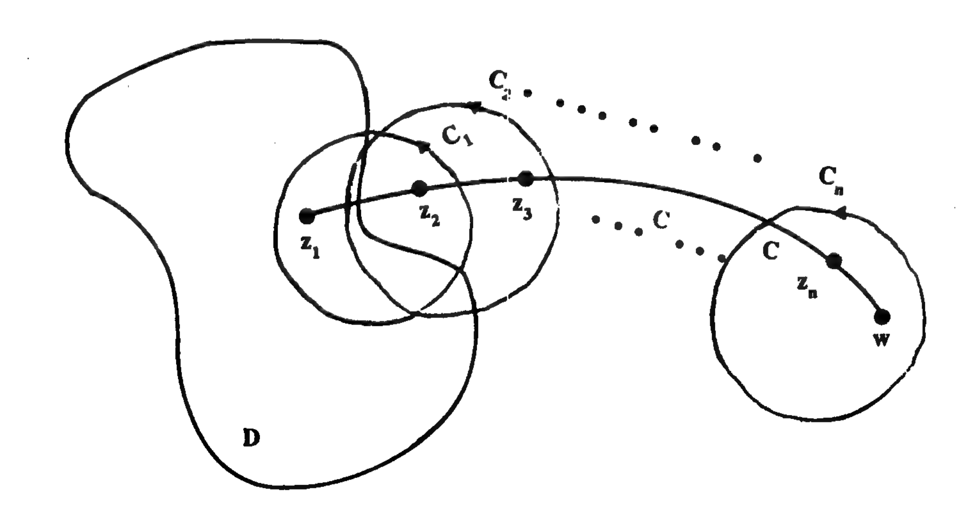
أما الاستمرار التحليلي على مسار فهو معرف فيما يلي :

تعريف ٢ :

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D. وأن النقطة w خارج المجال D. نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي بسيط للدالة f عند النقطة z في D والتي يصل بينها وبين النقطة w المسار C وذلك بتمثيل الدالة f بتسلسلة تايلور عند النقطة z_1 وهي :

$$(٣ - ٧) \quad \ldots \quad f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(z_1)}{k!} (z-z_1)^k$$

وهذه المساواة صحيحة على قرص التقارب D_1 الذي مركزه z_1 ومحيطه الدائرة C_1 أنظر الشكل (١).



شكل (١)

فيصبح جزء من المسار C داخل الدائرة C_1 فإذا فرضنا أن z_2 تقع على المسار C وهي خارج المجال D فـإن $f(z_2)$ تسمى الاستمرار التحليـلي البسيط للدالة f الى النقـطة z_2. ثم نبحث عن استمـرار تحليـلي بسيط للدالـة f عنـد النقـطة z_2 وذلـك بإيجـاد تمثيـل للدالـة f_1 (٧ ـ ٣) بتسلسلة تـايلور عنـد النقـطة z_2 والتي تتحقق ضمن قرص التقارب D_2 الذي مركزه z_2 ومحيطه C_2 وهكذا يصبح جـزء آخر من المسار C داخل الدائرة C_2 فإذا كانت z_3 تقع على هذا المسار C وداخل C_2 ولكنها خارج C_1 فإن $f_2(z_3)$ عبارة عن الاستمرار التحليلي البسيط للدالة (٧ ـ ٣) عند z_3 وهكذا بعـد تكرار العمليـة السابقـة n خطوة نحصـل على النقـاط التالية $z_1, z_2, \ldots, z_n$ التي تقع على المسار C وتمثل مراكز الـدوائر $C_1, C_2, \ldots, C_n$ على الترتيب بحيث إن C_n تحتوي على النقطة w بداخلهـا وكذلـك نحصل عـلى الدوال $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بحيث إن f_k استمرار تحليلي بسيط للدالة f_{k-1} عند z_k وفي هذه الحالة تسمى الدالة $f_n(w)$ استمرار تحليلي للدالة f عند w على المسار C.

ومما يجدر ذكره أنه قد لا يوجد استمرار تحليلي لدالة ما عند نقطة خارج مجالها عند مسار ما وإن وجد مثل ذلك الاستمرار التحليلي فإنه يكون واحداً ووحيداً. كـذلك يمكن أن نؤكـد أن الدالـة التحليلية f عـلى مجال D تتحـدد قيمتها تمـاماً بقيمتها على مسار داخل D.

الأمثلة التالية توضح فكرة الاستمرار التحليلي على مسار ما.

مثـــال ٢:

الدالة $g(z) = \dfrac{1}{1+z}$ تمثل الاستمرار التحليلي للدالة $f(z)$ عنـد أي نقطة $z \neq -1$ على أي مسار يصل اليها بحيث:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \frac{1}{1+z}, |z| < 1.$$

مثـــال ٣:

نفرض أن الدالة f معرفة بالمساواة

$$f(z) = -i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{i} \right)^n$$

فبيِّن أن الدالـة $g(z) = \frac{1}{z}$ استمرار تحليـلي للدالة f من مجـال تقارب f إلى المستوي المركب z بحيث $z \neq 0$.

الحـــل:

نلاحظ أن مجال التقـارب للدالة f هـو القرص $|z-i| < 1$ وحيث إنها متتـالية هندسية فإنها تتقارب على هذا المجال للدالة:

$$f(z) = -i \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = \frac{1}{z}$$

وبالتالي فإن $f(z) = g(z) = \frac{1}{z}$ لكل z في المجال $|z-i| < 1$ (ما عدا بالطبع $z=0$) وبالتالي فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للدالة f على جميع الأعداد المـركبة $z \neq 0$.

مثـــال ٤:

جد قيمة الاستمرار التحليلي للدالة f حيث:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$$

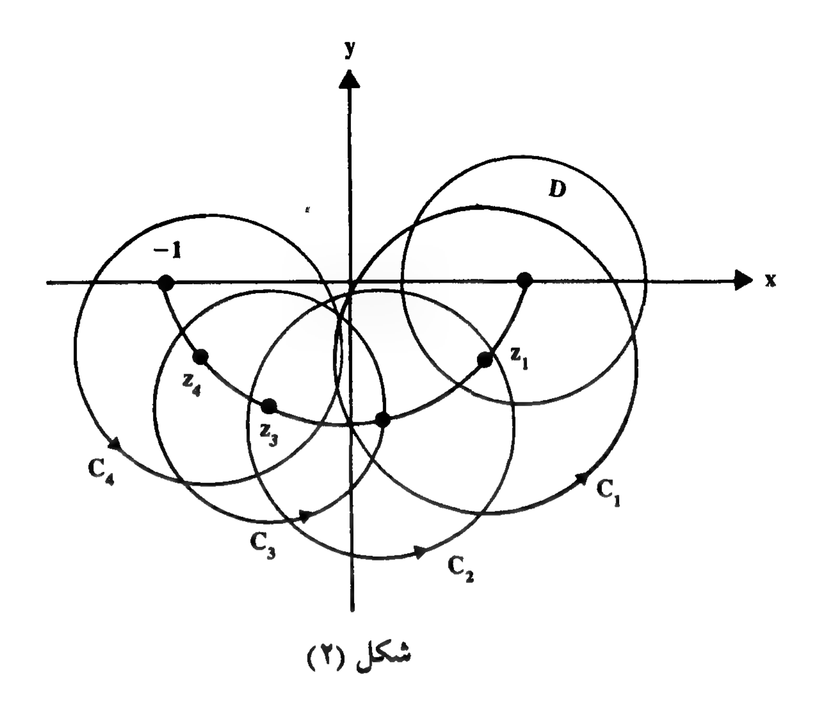
عند النقطة 1− على مسار يصل بين النقطة 1 والنقطة 1− في النصف السفلي من المستوي.

الحـــل:

بـإيجاد نصف قـطر التقارب للدالـة f وهـو 1 حيث إن قـرص التقـارب هـو $D: |z-1| < 1$

وكذلك يمكن أن نتعرف على أن هذه الدالة تتوافق مع الدالة g حيث:

$$g(z) = \log z$$



شكل (٢)

ما عدا بالطبع $z=0$ وكل النقاط التي تقع على الجزء السالب من المحور الحقيقي وبما أن -1 تقع خارج مجال التقارب D فإننا نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي للدالة f عند -1 على المسار C الذي يصل بين النقطتين $-1,$ 1.

وبما أن الدالة logz متعددة القيمة فإنه يمكن اختيار الفرع المناسب لهذه الدالة فمثلاً يمكن أن نجد الاستمرار التحليلي الى النقطة z_2 لنحصل على g_2 في داخل الدائرة C_2 أي أن الدالة:

$$g_2(z) = \ln |z| + i \arg z, \; -2\pi \leqslant \arg z < 0$$

تمثل هذا الفرع المناسب، فهي توافق log z عند z_2، وبالتالي توافق f عند z_2 وهكذا نبحث عن استمرار تحليلي للدالة g_2 عند z_3 داخل الدائرة C_3. فنختار الفرع المناسب للدالة log z وهو كذلك g_4 حيث:

$$g_4(z) = \ln |z| + i \arg z, \; -2\pi \leqslant \arg z < 0$$

وحيث إن 1- تقع داخل الدائرة C_4 فإن قيمة الاستمـرار التحليلي عنـد 1-
هو:

$$g_4(-1) = -\pi i$$

أي أن:

$$f(-1) = g_4(-1) = -\pi i$$

تمارين ٧ ـ ١

١ ـ بفرض أن g, f دالتان تحليليتان على المجال D بحيث إن $g(z) = f(z)$ لكل z في جوار (مفتوح) في المجال D. بيّن أن $f(z) = g(\acute{z})$ لكل z في D.

٢ ـ اذا كانت الدالة g استمراراً تحليلياً للدالة f من المجال D الى المجال S فبرهن أن الدالة:

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ g(z), & z \in S \end{cases}$$

وحيدة القيمة على المجال $D \cup S$.

٣ ـ بيّن أن الاستمرار التحليلي لدالة ما f (إن وجد فإنه) واحد ووحيد.

اقتراح: استعن بالتمرين ١.

٤ ـ بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D وأن (z_n) متتالية من نقاط D تقاربية للنقطة z_0 في D كذلك فإذا كان $f(z_n) = 0$ لكل $n = 1, 2, \ldots$

فبرهن أن $f(z) = 0$ لكل z في D.

اقتراح: استعن ببرهان نظرية ١ بعد أن تبين أن $f(z_0) = 0$ لكون الدالة متصلة وأنها صفر غير معزول للدالة f.

٥ ـ بفرض أن g, f دالتان تحليليتان في المجال D بحيث إن $f(z_n) = g(z_n)$ لكل $n = 1, 2, \ldots$ حيث (z_n) متتالية من نقاط D تتقارب للنقطة z_0 في D فبرهن أن $f(z) = g(z)$ لكل z في D.

اقتراح: استعن بالتمرين السابق.

٦ ـ اذا كانت الدالة f معرفة بالمساواة

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$$

فبيِّن أن قيمة الاستمرار التحليلي لها عند النقطة $z=-1$ على مسار يصل بين النقطة 1 و -1 ويقع في النصف العلوي للمستوي هو πi.

٧ ـ اذا كانت f تحليلية عند $z=0$ وأن:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, n = 1, 2,...$$

جد قيمة $f(z)$.

٨ ـ برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي أن:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

٩ ـ برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي كذلك أن:

$$e^{-z} \cdot e^{z} = 1$$

١٠ ـ استعن بالتمرين ١ وبفكرة الاستمرار التحليلي على مسار لإثبات أن الدالة التحليلية على مجال D تحدد تماماً بقيمها على D أو بقيمها على مسار داخل D.

١١ ـ بيِّن أن الدالة $g(z) = \frac{1}{z}$ استمرار تحليلي للدالة

$$f(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{i} \right)^n$$

عند أي نقطة z في المستوي (عدا $z=0$ بالطبع).

١٢ ـ بيِّن أن الدالة g المعرفة بالمساواة

$$g(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{1}{2} i \arg z}, |z| > 0, \frac{\pi}{2} < \arg z < 2\pi$$

تمثل استمراراً تحليلياً للدالة f من النصف العلوي للمستوي الى النصف

السفلي منه مروراً بالجزء السالب من المحـور الحقيقي حيث إن f معرفـة بالمساواة

$$f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{1}{2} i \arg z}, |z| > 0, 0 < \arg z < \pi$$

١٣ - بيِّن أن الدالة $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ تمثل استمراراً تحليلياً للدالة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

الى جميع نقاط المستوي ما عدا $z = +i$, $z = -i$.

١٤ - بيِّن كذلك أن الدالة $g(z) = \frac{1}{z^2}$, $z \neq 0$ تمثل استمراراً تحليلياً للدالة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

إلى جميع نقاط المستوي ما عدا $z=0$.

٧ ـ ٢ الدالة المطابقة (المشاكلة)

إذا فرضنا أن الدالة f تحليلية عند نقطة z_0 فإنه يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور

$$(\text{٧ - ٤}) \ldots \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots.$$

وكذلك يمكن كتابتها على الصيغة:

$$(\text{٧ - ٥}) \ldots \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)\, g(z)$$

حيث إن:

$$g(z) = \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0) + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^2 + \ldots$$

وتحقق:

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$$

وبالتالي إذا قصرنا بحثنا في خصائص الدالة f موضعياً عند z_0 أي في جوار (مفتوح) وصغير مركزه z_0 فإن الدالة f يمكن أن تقرَّب بدالة خطية

$$(\text{٧ - ٦}) \ldots \quad f(z) \cong f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$$

ومن المعروف أن تأثير الدالة الخطية $f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ عبارة عن انسحاب بمقدار $f(z_0)$ ثم دوران بمقدار $\arg f'(z_0)$ وكذلك تكبير بمقدار $|f'(z_0)|$ (الذي يسمى معامل القياس) وأن الدالة الخطية بالتالي تحافظ على الزوايا بين المسارات المارة في z_0 فهل تكتسب الدالة التحليلية مثل هذه الصفة وهي المحافظة على الزوايا بين المسارات المتقاطعة في نقطة ما، هذه الفكرة يبرزها التعريف التالي:

تعريف ٣:

إذا كانت الدالة f تحليلية عند z_0 وتحافظ على الزاوية بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0 فإنها تسمى دالة مطابقة (مشاكلة) (Conformal Mapping).

النظرية التالية تبين الشرط الذي يلزم تحققه لتكون الدالة f مطابقة.

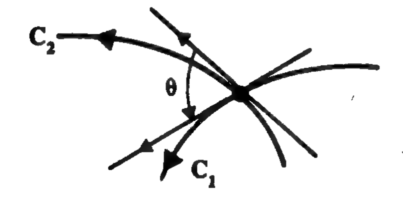
نظرية ٢:

بفرض أن الدالة f تحليلية عند النقطة z_0 وكانت $f'(z_0) \neq 0$ فإن f تكون مطابقة (أي تحافظ على الزاوية بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0).

البرهان:

لنفرض أن C_1, C_2 مساران متقاطعان في النقطة z_0 ومعرفان بالمعادلتين $a \leqslant t \leqslant b$, $z_1(t)$, $z_2(s)$, $c \leqslant s \leqslant d$ فتكون الزاوية بين C_1, C_2 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي θ حيث:

$$\theta = \arg z_2'(s) - \arg z_1'(t) \quad \ldots \quad (٧ - ٧)$$



حيث إن $z_0 = z_1(t_0) = z_2(s_0)$

وكذلك إذا فرضنا أن الدالة f تنقل المسارين C_1, C_2 إلى المسارين γ_1, γ_2 على الترتيب فإن γ_1, γ_2 معرفتان بالمعادلتين:

$$w_2 = f(z_2(s)),\ w_1 = f(z_1(t)),\ c \leqslant s \leqslant d,\ a \leqslant t \leqslant b \quad \ldots \quad (٨ - ٧)$$

وتكون الزاوية بين γ_1, γ_2 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي ϕ حيث

$$\phi = \arg w_2' - \arg w_1' \quad \ldots \quad (٩ - ٧)$$

وبشكل عام إذا فرضنا أن γ تمثل بالمعادلة :

$$(\text{١٠ - ٧}) \quad \ldots \quad w = f\big(z(t)\big),\ a \leqslant t \leqslant b$$

فإن قانون المتسلسلة يؤكد أن :

$$(\text{١١ - ٧}) \quad \ldots \quad w'(t) = f'(z)\, z'(t)$$

وبالتالي فإن :

$$(\text{١٢ - ٧}) \quad \ldots \quad \begin{cases} w_1'(s_0) = f'(z_0)\, z_1'(s_0) \\ w_2'(t_0) = f'(z_0)\, z_2'(t_0) \end{cases}$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$(\text{١٣ - ٧}) \quad \ldots \quad \begin{cases} \arg w_1' = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0) \\ \arg w_2' = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(s_0) \end{cases}$$

وإذا كان $f'(z_0) \neq 0$ فإن $\arg f'(z_0) \neq 0$ وبالتالي يكون :

$$(\text{١٤ - ٧}) \quad \ldots \quad \arg w_2' - \arg w_1' = \arg z_2'(s_0) - \arg z_1'(t_0)$$

وبالتالي فإن $\theta = \varnothing$ أي أن الدالة حافظت على الزوايا بين المسارين وهي بالتالي تكون مطابقة وهذا ينهي إثبات النظرية.

اذا كانت الدالة مطابقة عند كل نقطة في مجال D فإنها تسمى مطابقة على D. أما إذا كانت الدالة تحليلية عند z_0 ولكن $f'(z_0) = 0$ فإنها لا تكون مطابقة عند z_0 وهنا تسمى z_0 نقطة حرجة للدالة f، وقد تكون مطابقة عند نقطة أخرى، فإذا فرضنا أن $f'(z_0) = 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن :

$$(\text{١٥ - ٧}) \quad \ldots \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m\, g(z)$$

حيث إن $g(z)$ تحليلية عند z_0, $g'(z_0) \neq 0$. لاحظ أن $g(z)$ مطابقة وبالتالي تحافظ على الزوايا. وإذا كان C مساراً ممهداً يمر بالنقطة z_0 ومعرف بالمعادلة $z(t), z_0=z(t_0), a \leqslant t \leqslant b$ فإن صورة هذا المسار C هو γ حيث تكون γ معرفة بالمعادلة

$$w-w_0 = f\left(z(t)\right) - f\left(z(t_0)\right) = \left(z(t) - z_0(t)\right)^m g\left(z(t)\right)$$

وبالتالي فإن:

$$(١٦ - ٧) \quad \ldots \arg(w-w_0) = \arg\left(f(z) - f(z_0)\right)$$

$$= m \arg(z-z_0) + \arg g(z)$$

فإذا فرضنا أن:

$$\arg g(z) = \alpha, \lim_{z \to z_0} \arg(z-z_0) = \beta,$$

$$\lim_{w \to w_0} \arg(w-w_0) = \delta$$

فإن

$$\delta = m\beta + \alpha$$

فإذا كانت الزاوية بين C_1, C_2 هي على الترتيب β_1, β_2 فإن δ_1, δ_2 هما زوايتا ميل المسارين δ_1, δ_2 اللذين يمثلان صورتي C_1, C_2 على الترتيب تحت f ومن ذلك ينتج أن:

$$\delta_2 - \delta_1 = (m\beta_2 + \alpha) - (m\beta_1 + \alpha)$$

أي أن:

$$(١٧ - ٧) \quad \ldots \delta_2 - \delta_1 = m(\beta_2 - \beta_1)$$

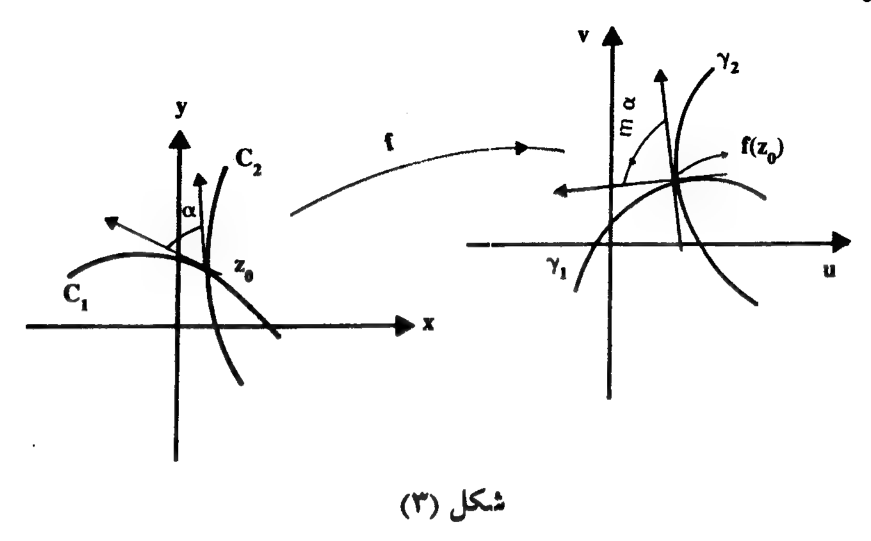
أي أن الزاوية بين المسارين γ_1, γ_2 هي $\delta_1 - \delta_2$ وهي m أضعاف الزاوية بين المسارين C_1, C_2 وهي $\beta_1 - \beta_2$ وبهذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية ٣:

نفرض أن الدالة f تحليلية عند z_0 بحيث إن:

$$f^k(z_0) = 0, k = 1, 2, \ldots, m-1, f^m(z_0) \neq 0$$

فإن الدالة f تكبِّر الزاوية بين أي مسارين متقاطعين في النقـطة z_0 بمقدار m مرة.



شكل (٣)

النظرية التالية تبيِّن أن الدالة التحليلية التي تكون مشتقتها ليست صفـراً على مجال ما تكون واحداً لواحد على ذلك المجال.

نظرية ٤ :

نفرض أن الدالة f تحليلية على مجال D فإذا كانت $f'(z)\neq 0$ لكل z في D فإن f واحـد لواحد على D.

البرهان:

نفرض أن z_0 نقطة اختيارية في D وأنه لا يوجد جوار (مفتوح) مركزه z_0 تكون عليه الدالة f واحداً ـ لواحد. لذلك يمكن أن نستنتـج أن في كل قـرص مفتوح مركزه z_0 يوجد عـلى الأقل نقـطتان مختلفتـان w, z بحيث إن $f(z) = f(w)$ ومن هـذه الحقيقـة نستنتـج وجـود متتـاليتـين $(z_n), (w_n)$ من نقــاط D بحيث إن $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = z_0$ وأن $f(z_n) \neq f(w_n)$ لـكــل $n = 1, 2, \ldots$. فــإذا فرضنا أن C كانتور مغلق وبسيط في داخل D فإن f تحليليـة على C وفي المنـطقة الداخلية له كذلك. وبتطبيق نظرية كوشي للتكامل فإن:

$$(\text{١٨ - ٧}) \ldots \quad \frac{f(w_n) - f(z_n)}{w_n - z_n} = \frac{1}{w_n - z_n} \; \frac{1}{2\pi i}$$

$$\left\{ \int_c \frac{f(s)}{s - w_n} \, ds - \int_c \frac{f(s)}{s - z_n} \, ds \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i \, (w_n - z_n)} \int_c \frac{f(s)\,(w_n - z_n)}{(s - w_n)\,(s - z_n)} \, ds$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ $\lim_{n\to\infty} w_n =$ فإن

$$\lim_{\substack{z_n \to z_0 \\ w_n \to z_0}} \int_c \frac{f(s)}{(s - w_n)\,(s - z_n)} \, ds = \int_c \frac{f(s)}{(s - z_0)^2} \, ds$$

وعليه فإن:

$$(\text{١٩ - ٧}) \ldots \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n) - f(z_n)}{w_n - z_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{(s - z_0)^2} \, ds$$

وباستخدام نظرية كوشي للمشتقة فإن الطرف الأيمن يمثل $f'(z_0)$. أما الطرف الأيسر فإنه يساوي صفراً وبالتالي فإن $f'(z_0)=0$ وهذا يناقض الفرض مبيناً أن الدالة يجب أن تكون واحداً - لواحد منهياً بذلك إثبات النظرية.

النظرية التالية هي نتيجة للنظرية السابقة ونترك إثباتها تمريناً للقارىء.

نظرية ٥:

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D وكانت كذلك واحداً - لواحد على D فإنها تكون مطابقة على ذلك المجال.

الأمثلة التالية توضح فكرة الدالة المطابقة.

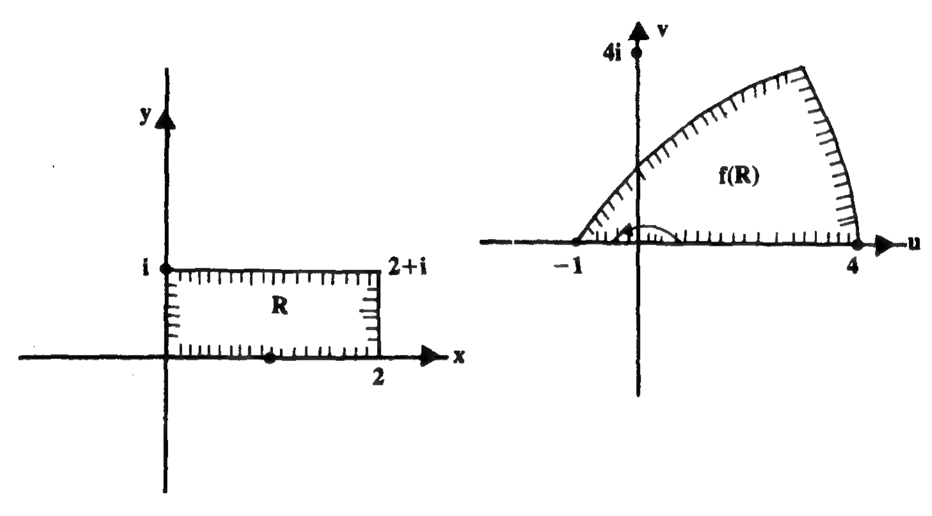
مثال ٦:

بما أن الدالة $f(z) = e^z$ دالة تحليلية على كل المستوى المركب وكذلك $f'(z) = e^z \neq 0$ لكل z في المستوي فإن الدالة f تكون مطابقة على كل المستوي.

مثـــال ٧:

الـدالة $f(z) = z^2$ تحليليـة على كـل المستـوي المـركب ولكن $f'(0) = 0$ عنـد النقطة $z_0 = 0$ وبالتالي فإن الدالة f ليست مـطابقة عنـد النقطة $z_0 = 0$ وبمـا أن $f''(z) = 2 \neq 0$ فإن النظرية ٣ تؤكد أن الدالة f تكبّر الزاوية عند $z_0 = 0$ بمقدار $m = 2$ وبالتالي لإيجاد صورة المستطيل R، حيث:

$R = \{x + yi: 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$



شكل (٤)

فإن صورة الزاوية القائمة عند $z_0 = 0$ تضاعف لتصبح الزاويـة المستقيمة π في المستـوي u, v وبالحســاب يمكن معرفـة أن صورة النقـاط 2, 2+i, i هي على الترتيب 1−, 4, 3+4i. ولإيجاد صور القطع المستقيمة نجد العلاقات التالية:

$$u + vi = \left(w = f(z) = z^2\right) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

وبالتالي فإن:

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

وحـيث إن $y \geqslant 0, x \geqslant 0$ في المـســتــطيــل R فــإن $v = 2\,xy > 0$ أي أن $\text{Im}\, w > 0$ وبحـذف المتغـيرات y, x بـين العـلاقتـين $v = 2xy, u = x^2 - y^2$

عندما تأخذ هذه المتغيرات القيم على أضلاع المستطيل نجد أن صورة ضلع المستطيل $y = 1, 0 < x < 2$ هي $v^2 - u = 1 \frac{1}{4}$ وكذلك صورة ضلع المستطيل $x = 2, 0<y<1$ هي $u + \frac{1}{16} v^2 = 4$ وعليه فإن صورة المستطيل تأخذ الشكل (٤).

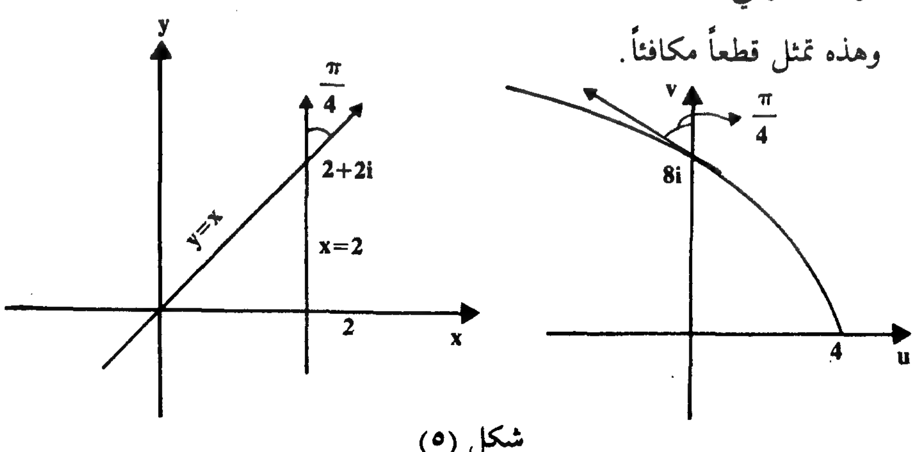
لاحظ أن مقياس التكبير هو: $|f'(z_0)|$ . . . (٧ - ٢٠)

فيكون عند $z = 2 + i$ هو: $|f'(z)| = 2|2+i| = 2\sqrt{5}$

مثال ٨:

لاحظ أن الدالة $f(z) = z^2$ في المثال السابق دالة مطابقة عند كل $z\neq0$. وذلك لأن $f'(z) = 2z \neq 0$ فإذا أخذنا المسارين $y = x$ و $x=2$ المتقاطعين عند النقطة $z_0 = 2 + 2i$ فسنبين أن الدالة تحافظ على الزاوية بين صورتي هذين المسارين وهي $\theta = \pi/4$ ولنرى ذلك نستعين بالعلاقتين $v = 2xy, u = x^2 - y^2$ ولإيجاد صورة المسار الأول المعرف بالمعادلة $y = x$ فإن $u = 0$ وكذلك $v = 2y^2 > 0$ يحددان صورة هذا المسار وبالتالي فإن صورة المسار $y = x$ هو النصف الموجب من المحور التخيلي v ولإيجاد صورة المسار الثاني المعرف بالمعادلة $x = 2$ فإن $v = 4y, u = 4 - y^2$ وبحذف y من كلا المعادلتين نجد صورة المسار $x=2$ وهي: $u = 4 - v^2/16$

وهذه تمثل قطعاً مكافئاً.



شكل (٥)

لاحظ أن الزاوية هي $\text{Arg}\left(f'(2+2i)\right)$ وهي :

$$\text{Arg}(4+4i) = \pi/4$$

أي أن الزاوية هي $\pi/4$ تماماً كما كانت بين المسارين :

$$x = 2,\ y = x$$

مثـال ٩ :

لاحظ أن الدالة $f(z) = \cos z$ دالة مطابقة عند جميع z

بحيث إن $z \neq n\pi,\ n = 1, 2, \ldots$ وهي التي تجعل $f'(z) = -\sin z$ صفراً.

أما عند هذه النقاط فإن الدالة ليست مطابقة.

ننهي هـذا البند بملاحظة أن الـدالة المـطابقة عنـد نقطة z_0 يـوجد لها نـظير موضعي أي دالة عكسية موضعية أي معرفة على جوار (مفتوح) ومركزه النقـطة z_0 فإذا رمزنا للدالة العكسية الموضعية بالرمز g وللدالـة بالـرمز f فـإن العلاقـة بين مشتقتي الدالتين (وهي معروفة) هي :

$$(٢١ - ٧) \ldots\ g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

لكـل z في الجوار (مفتوح) الذي مـركزه z_0. ولـربط هذه الفكـرة بالتفـاضل المتقـدم نستفيد من معـادلتي كـوشي ـ ريمـان وكـون الـدالـة f تحليليـة حيث إن الجاكوبي لهذه الدالة هو:

$$(٢٢ - ٧) \ldots\ J(f) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = \left|f'(z_0)\right|^2$$

فـإذا كانت هـذه الدالـة مطابقـة فـإن $f'(z_0) \neq 0$ وبـالتـالي فـإن الجـاكـوبي $J(f) \neq 0$ مؤكداً أن الدالة f لها دالة عكسية في جوار (مفتوح) حول z_0.

تمارين ٧ - ٢

١ - بيِّن أن الدوال التالية مطابقة

أ - $f(z) = \sin z$ ب - $f(z) = e^{z^2}$

جـ - $f(z) = z^2 + z$ د - $f(z) = \cos 2z$

هـ - $f(z) = i z^2$

٢ - جد صورة المربع R تحت الدالتين $g(z) = iz^2, f(z) = z^2$ حيث إن
$R = \{x + yi: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

٣ - صف صورة المجالات التالية تحت الدالة المطابقة $f(z) = e^z$

أ - $D = \{z: 0 < \text{Im. } z < \pi/2\}$

ب - المنطقة المثلثية المحددة بالمسارات:

$y = 0, y = x, x = 2$

جـ - $D = \{z: \text{Re } z > 0\}$

د - $D = \{z: \text{Re } z > 0, 0 < \text{Im } z < \pi/2\}$

٤ - جد دالة عكسية موضعية للدالة $f(z) = z^2$ عند النقاط التالية:

أ - $z_0 = 1$ ب - $z_0 = i$

٥ - بيِّن أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ مطابقة عند جميع النقاط عدا $z=0$.

٦ - برهن النظرية ٥.

٧ - بيِّن أن الدالة $f(z) = z^2$ واحد - لواحد على المجال
$D = \{z \in \mathbb{C}: \text{Re. } z > 0\}$

ولكنها ليست واحداً ـ لواحد على أي مجال يحتوي D.

٨ ـ بفرض أن الدالة f تحليلية وكذلك واحـد ـ لواحد على مجال D وعرفنا الدالة h بالمساواة $h^2(z) = f(z)$ لكل z في D برهن أن h واحـد ـ لواحد على D.

٩ ـ لتكن الدالة f تحليلية على المجال D حيث:

$$D = \{z: |z| < 1\}$$

ونفرض أن $f(0) = 0$ وأن $|f(z)| < 1$ لكل z في D.

أ ـ برهن أن $|f(z)| < |z| < 1$ لكل z في D.

ب ـ إذا كانت $z_0 \neq 0$ بحيث إن $f(z_0) = z_0$ فبرهن أنه يوجد عدد مركب α بحيث إن:

$$f(z) = \alpha z; \ |\alpha| = 1$$

اقتراح:

أ ـ من كون الدالة تحليلية وأن $f(0) = 0$ بيِّن أن $f(z)/z$ تحليلية كذلك ثم بيِّن أن

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \max_{z \in C_r} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r}, \ C_r: |z| = r < 1$$

ثم خذ النهاية عندما $r \to 1$ لتستنتج المطلوب.

ب ـ استعن بقانون القيمة المطلقة العظمى لإثبات أن:

$$\frac{f(z)}{z} = \alpha, |\alpha| = 1$$

α مقدار ثابت.

ملاحظة الفرع أ من هذا التمرين يعرف بأنه نظرية شوارتز.

٧ ـ ٣ الدالة مزدوجة الخطية

نتناول في هذا البند نوعاً هاماً من الدوال يمثل عائلة من الدوال المطابقة ولها تطبيقات كثيرة وتسمى الدالة مزدوجة الخطية.

الدالة مزدوجة الخطية:

لأي أربعة أعداد مركبة $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ عرِّف الدالة f بالمساواة التالية:

$$(٢٣ ـ ٧) \quad \ldots \quad f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad , \alpha \delta \neq \beta \gamma$$

هذه الدالة دالة نسبية وبالتالي لها قطب بسيط عند النقطة $z_0 = -\delta/\gamma$ أما الشرط $\alpha \delta \neq \beta \gamma$ فهو ضروري حتى لا تكون الدالة ثابتة القيمة. ولهذه الدالة خصائص هامة كثيرة نلخصها فيما يلي:

أ ـ الدالة f مطابقة عند جميع الأعداد المركبة عدا القطب $z_0 = -\delta/\gamma$ طبعاً. لأن:

$$(٢٤ ـ ٧) \quad \ldots \quad f'(z) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma z + \delta)^2} \neq 0$$

لأن $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

ب ـ بالاستفادة من نظرية ٤ فإن الدالة f واحد ـ لواحد كذلك على جميع نقاط المستوي عدا القطب δ/γ ـ أي على المجال $D = \mathbb{C} - \{-\delta/\gamma\}$.

جـ ـ يمكن إعادة تعريف هذه الدالة لتصبح واحداً ـ لواحد على كرة ريمان أي على المجال $D = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ وذلك كما يلي:

$$(٢٥ ـ ٧) \quad \ldots \quad g(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, & z \neq -\delta/\gamma \\ \infty, & z = -\delta/\gamma \\ \alpha/\gamma, & z = \infty \end{cases}$$

د ـ لكون هذه الدالة واحداً ـ لواحد على المجال $D = \mathbb{C} - \{-\delta/\gamma\}$ فيوجد لها دالة عكسية هي:

$$(\text{٢٦ ـ ٧}) \;\; \ldots \; z = h(w) = \frac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}$$

حيث إن:

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

ويمكن كتابة كل منهما بدلالة المتغيرين z, w كما يلي:

$$(\text{٢٧ ـ ٧}) \;\; \ldots \; \alpha z + \beta = w\gamma z + \delta w$$

ومن هذه العلاقة يتبين لنا سبب التسمية باسم مزدوجة الخطية فهذه العلاقة تبينً أن الدالة خطية بالمتغير z وهي كذلك خطية بالمتغير w.

هـ ـ ولكون هذه دالة يمكن تعريفها لتصبح واحداً ـ لواحد على المجال $D = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ فإنه يوجد لها دالة عكسية وهي:

$$(\text{٢٨ ـ ٧}) \;\; \ldots \; g^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} & , \quad z \neq \dfrac{\alpha}{\gamma} \\ \infty & , \quad z = \alpha/\gamma \\ -\delta/\gamma & , \quad z = \infty \end{cases}$$

و ـ يمكن اعتبار هذه الدالة مزدوجة الخطية على أنها تركيب لعدة دوال مثل الإزاحة والدوران والتكبير والمقلوب. انظر تمرين ٢٤.

ز ـ من أهم خصائص هذه الدالة أنها تنقل مجموعة الدوائر والخطوط المستقيمة الى نفسها أي أن صورة الدائرة إما أن تكون دائرة أو خطاً مستقيماً وكذلك صورة الخط المستقيم إما أن تكون دائرة أو خطاً مستقيماً.

ح ـ يمكن إيجاد دالة مزدوجة الخطية تنقل أيَّ ثلاث نقاط مختلفة في المستوي

إلى أي ثلاث نقاط متميزة أخرى. فإذا أردنا أن نجد الدالة المزدوجة الخطية التي تنقل النقاط z_1, z_2, z_3 الى w_1, w_2, w_3 على الترتيب فإننا نجد w كدالة في z من النسبة التالية:

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} \quad \ldots (٢٩ - ٧)$$

هذه علاقة جبرية تبيِّن أن صورة z_1 هي w_1 وصورة z_2 هي w_2 وكذلك صورة z_3 هي w_3. وكذلك هي مزدوجة الخطية إذا حصلنا على الضرب التبادلي لهذه العلاقة. وإذا كانت إحدى النقاط المطلوبة هي الرمز ∞ فإننا نفرض أن النسبة التي تحتوي على هذه النقطة هي 1. وبدقة أكثر نفرض أن إحدى النقاط $w_1 = \infty$ فإننا نفرض أن $\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = 1$ وهي التي تحتوي على w_1 لنحصل على العلاقة المطلوبة وهي:

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{w_2 - w_3}{w - w_3} \quad \ldots (٣٠ - ٧)$$

سنبيِّن ونوضح الحقائق في ز، ح بالأمثلة التالية:

مثال ١٠:

جد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط $-1, 2, i$ الى النقاط $i, -3, 1$.

الحل:

بتطبيق العلاقة (٧ ـ ٢٩) حيث إن:

$$z_1 = -1, z_2 = 2, z_3 = i, w_1 = i, w_2 = -3, w_3 = 1$$

لنحصل على:

$$\frac{(z + 1)(2 - i)}{(z - i)(2 + 1)} = \frac{(w - i)(-3 - 1)}{(w - 1)(-3 - i)}$$

ومنها فإن:

$$\frac{4(w-i)}{(w-1)(3+i)} = \frac{(z+1)(2-i)}{3(z-i)}$$

وبإجراء العمليات الجبرية اللازمة لإيجاد w بدلالة z نحصل على الدالة المطلوبة وهي:

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

حيث إن:

$$\alpha = -7 + 13i, \beta = 5 + i = \gamma, \delta = -7 - 11i$$

مثال ١١:

جد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط $2, 1 + i, 0$ الى النقاط $0, 1, \infty$.

الحل:

بتطبيق فكرة العلاقة (٧ ـ ٣٠) حيث إن:

$$z_1 = 2, z_2 = 1 + i, z_3 = 0, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$$

أي بفرض أن: $1 = \frac{w_2 - w_3}{w - w_3}$ لنحصل على العلاقة:

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

ومنها فإن:

$$w = \frac{(z-2)(1+i)}{z(1+i-2)}$$

أي أن:

$$w = \left(\frac{1+i}{-1+i}\right) \quad \frac{z-2}{z}$$

ويمكن تبسيط هذه الدالة لتصبح كما يلي:

$$w = \frac{-iz + 2i}{z}$$

مثـال ١٢:

بيِّن أن الدالة

$$f(z) = \frac{1 + z}{i\,(1 - z)}$$

تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ الى نصف المستوي السفلي.

الحـل:

لنكتب الدالة على الصورة التالية:

$$w = f(z) = \frac{iz + i}{z - 1}$$

لنحصل على قيم الثوابت $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ وهي:

$$\alpha = i = \beta, \gamma = 1, \delta = -1$$

وبالتالي فإنه يوجد دالة عكسية لهذه الدالة وهي:

$$z = g\,(w) = \frac{w + i}{w - i}$$

وذلك بتطبيق العلاقة (٧ ـ ٢٦). وحتى نبحث تأثير هذه الدالة على القرص المفتوح نبحث عن صورة دائرة الوحدة $|z| = 1$ وبالتعـويض في الدالـة العكسية لنحصل على:

$$1 = |z| = \left|\frac{w + i}{w - i}\right|$$

أي أن:

$$|w + i| = |w - i|$$

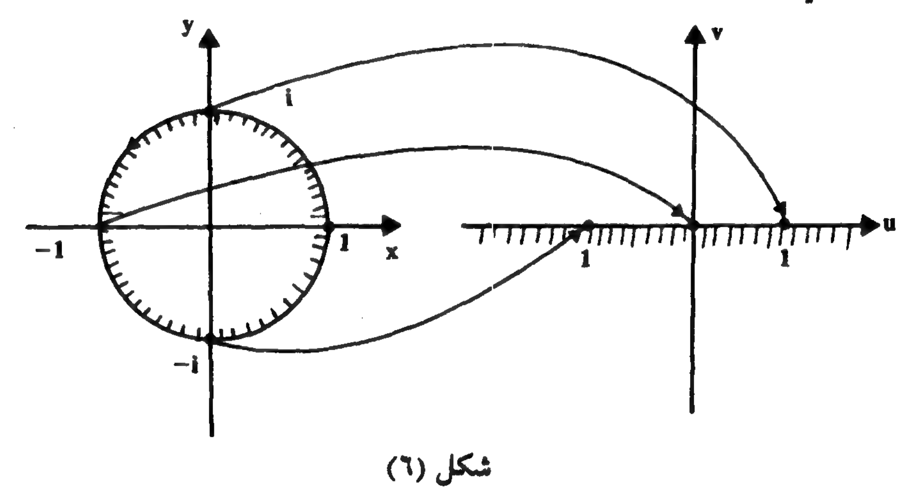
وبالتعويض بدلاً من w بالقيمة $u + vi$ نحصل على:

$$|u + (v + 1) i| = |u + (v - 1) i|$$

ومنه فإن:

$$u^2 + (v + 1)^2 = u^2 + (v - 1)^2$$

وهـذا ينتج المعـادلة $v = 0$ وهـذا يعني أن صورة دائـرة الوحـدة هي المحـور الحقيقي u $(v = 0)$ حيث أن $f(-1) = 0$ وكذلك $f(i) = 1$.



شكل (٦)

وينصح هنا بتوضيح الاتجـاه الموجب للكانتور $|z| = 1$ لنحدد اتجاه صورته وهي المحور الحقيقي بالاتجـاه السالب (وذلـك بأخـذ صورة عـدة نقاط عـلى الدائـرة لتوضيح الاتجاه) فتكون صورة المنطقـة الداخليـة للكانتـور $|z| = 1$ هي المنطقـة التي تقع على يساره صورة هـذا الكانتـور أي النصف السفلي للمستـوي المركب وللتحقق من ذلـك نفـرض أن $|z| < 1$ في الـدالـة العكسيـة لنحصـل عــلى أن $|w + i| < |w - i|$ وبكتـابة هـذه العلاقـة على الصـورة $|w - (-i)| < |w - i|$ والتي تفسر على أن المسافة بين w و $-i$ أصغر من المسافة بين w وi وهـذا الشرط ينطبق على النصف السفلي للمستوى.

مثـال ١٣:

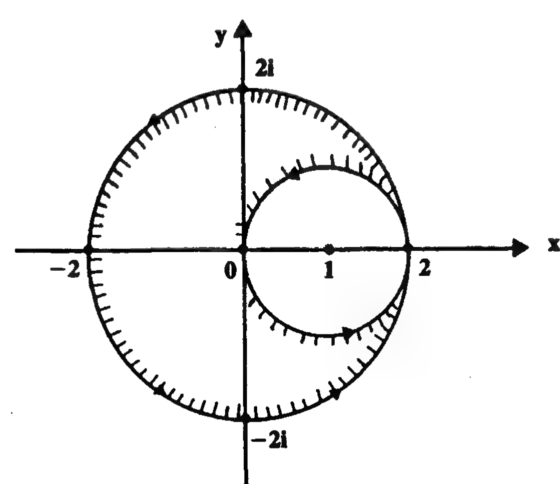
إبحث في تأثير الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ على المستوي المـركب. (أي بين أنها تنقـل الـدائرة الى دائـرة أو خط مستقيم وكذلـك الخط المستقيم تنقله الى دائرة أو خط مستقيم).

الحـل:

من الواضح أن هذه الدالة تنقل كرة ريمان الى نفسها بشكل واحـد ـ لواحـد حيث إن $f(0) = \infty$ و $f(\infty) = 0$ وأن $f(z) = \frac{1}{z}$ لباقي الأعداد المـركبة. وهي كذلك حالة خاصة من الدالة مزدوجة الخطية لذلك فهي دالة مطابقـة عند كـل الأعداد المركبة باستثناء $z=0$. ومن تأثيرها على المستوى أنها تنقـل دائرة الـوحدة الى نفسهـا بحيث إن $f(z) = \bar{z}$ لكل z: $|z| = 1$ وكـذلـك تنقـل كـل نقـطة في داخل قرص الوحدة الى نقطة خارج هذا القرص وذلـك إذا فرضنـا أن $|z| < 1$ فإن $w = \frac{1}{z}$ ومنه فإن $|z| = \frac{1}{|w|}$ وبالتالي فإن $\frac{1}{|w|} < 1$ أي أن $|w| > 1$. أما الدالة العكسية لهذه الدالة فهي نفسها.

مثـال ١٤:

جد دالة مزدوجة الخطية تنقل المنطقـة الهلاليـة في الشكل (٧) الى شريحـة لا نهائية.



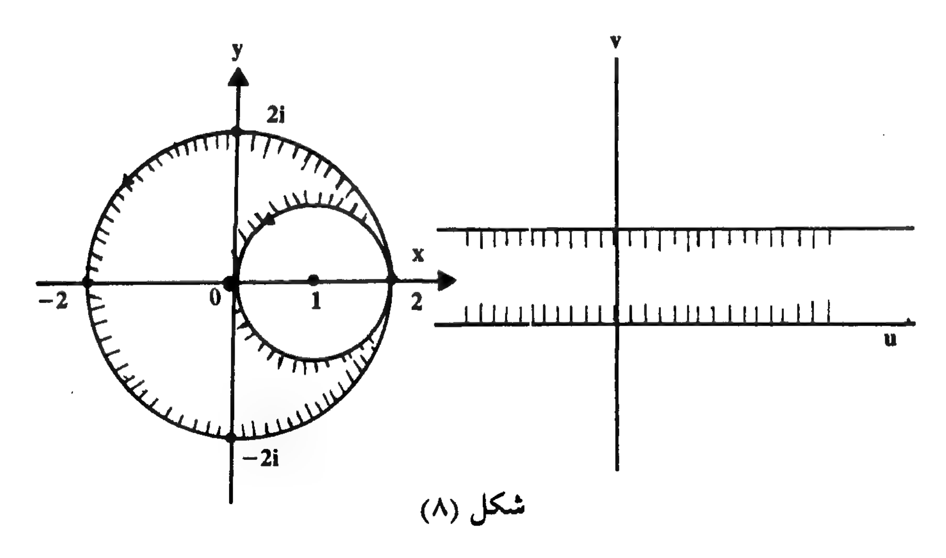
شكل (٧)

الحــل :

المنـطقة المـطلوب إيجاد صـورتها هي داخـل الدائـرة $|z| = 2$ وخارج الـدائرة $|z-1| = 1$. أولاً نحاول أن نجد دالة مزدوجة الخطية تنقل الـدائرة $|z| = 2$ الى المحور الحقيقي u مثلاً والقرص الى النصف العلوي من المستوي المـركب وذلك باختيار ثلاث نقاط على الدائرة مرتبة حسب الاتجاه الموجب لها وثلاث نقاط على المحور الحقيقي بالاتجاه الموجب مثـلاً : $z_1 = -2, z_2 = -2i, z_3 = 2$ وكذلـك $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$ وبتطبيق فكرة العلاقة (٧ ـ ٣٠) وإجـراء العمليات الجبرية اللازمة للتبسيط نجد أن الدالة المطلوبة هي :

$$w = \frac{-i\,(z+2)}{(z-2)} \quad \ldots \quad (٣١ ـ ٧)$$

وحسب التعريف فإن هذه الدالة (٧ ـ ٣١) تنقل الدائرة $|z| = 2$ الى المحـور الحقيقي (المغلق) u (أي أن $v = 0$). وحسب الاتجـاه يتبين أن صـورة القـرص المفتوح $|z| < 2$ هي نصف المستوي المركب uv العلوي. وللتأكد من ذلك علينا



شكل (٨)

أن نبيِّن أنه اذا كانت $|z| < 2$ فإن $\text{Im } w > 0$ وبإيجاد الدالة العكسيـة للدالة (٧ ـ ٣١) (وذلك باستخدام العلاقة (٧ ـ ٢٦)) وهي :

$$z = \frac{2w - 2i}{w+i}$$

حيث إن: $\alpha = -i, \beta = -2i, \gamma = 1, \delta = -2$

وحيث إن $|z| < 2$ فإن: $|z| = \left| \frac{2w - 2i}{w+i} \right| < 2$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن: $|w-i| < |w-(-i)|$

وهذه العلاقة تفسر على أن بعد w عن النقطة i أصغر من بعد النقطة w عن $-i$ وهذا لا يكون إلا في النصف العلوي من المستوي المركب uv حيث $\operatorname{Im} w > 0$. الخطوة التالية هي أن نجد صورة الدائرة $|z-1| = 1$ تحت الدالة (٧ ـ ٣١) وذلك باختيار ثلاث نقاط مختلفة مثل $1+i, 0, 1-i$ وبالتعويض في الدالة (٧ ـ ٣١) نجد أن صورها هي على الترتيب.

$$w_1 = f(1+i) = -2+i$$

$$w_2 = f(0) = i,\ w_3 = f(1-i) = 2+i$$

نلاحظ أن هذه الصور $-2+i, i, 2+i$ تقع جميعها على الخط المستقيم $v=1$ وبذلك فإن صورة المنطقة الهلالية هي الشريحة R حيث:

$$R = \{w: 0 < \operatorname{Im} w < 1\}.$$

المثال التالي يناقش دالة من أهم الدوال المطابقة المزدوجة الخطية لأنها تنقل قرص الوحدة المفتوح إلى نفسه.

مثال ١٥:

بيِّن أن الدالة مزدوجة الخطية المعرفة بالمساواة التالية:

$$f(z) = \bar{\lambda}\, \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} \cdot z}, \quad |\lambda| = 1, |\alpha| < 1 \qquad \text{(٧ ـ ٣٢)}$$

تنقل قرص الوحدة المفتوح $|z| < 1$ إلى نفسه.

الحـــل:

بما أن $1 \cdot \bar{\lambda} - \neq \alpha\bar{\alpha}$ $\bar{\lambda}$ فإن الدالة

$$f(z) = \frac{\bar{\lambda}\ \alpha - \bar{\lambda}\ z}{1 - \bar{\alpha}\ z}$$

واحد ـ لواحد والدالة العكسية لها هي:

$$g(w) = \frac{-w + \alpha\bar{\lambda}}{-\bar{\alpha}\ w + \bar{\lambda}} = \frac{-\lambda w + \alpha}{-\bar{\alpha}\ \lambda w + 1}$$

ومن ذلك فإن:

$$g(w) = \lambda\ \frac{\alpha\bar{\lambda} - w}{1 - \bar{\alpha}\ \lambda\ w}$$

ومن السهـــل التحقـق من أن $gof(z) = z$ وأن $fog(w) = w$ ونـــترك ذلـــك للقارىء.

بقي أن نثبت أنـه إذا كان $|z| < 1$ فـإن $|f(z)| < 1$ وكذلـك إذا كان $|w| < 1$ فـإن $|g(w)| < 1$ ويكفي أن نثبت الأول ونترك الثـاني تمريناً للقـارىء ولـذلـك نفرض أن $|z| < 1$ فإن

$$|f(z)|^2 = \frac{|\alpha|^2 - 2\text{Re}.\ (\bar{\alpha}\, z) + |z|^2}{1 - 2\ \text{Re}\ (\bar{\alpha}\ z) + |\alpha|^2\, |z|^2}$$

وكذلك فإن $|f(z)| < 1$ عندما يتحقق الشرط

$$|\alpha|^2 - 2\ \text{Re}.\ (\bar{\alpha}\, z) + |z|^2 < 1 - 2\text{Re}\ (\bar{\alpha}\, z) + |\alpha|^2\, |z|^2$$

ومن ذلك فإن:

$$|\alpha|^2 + |z|^2 < 1 + |\alpha|^2\, |z|^2$$

وهذه المتباينة يمكن أن تكتب بالصيغة التالية:

$$1 + |\alpha|^2 |z|^2 - |\alpha|^2 - |z|^2 > 0$$

ومن ذلك فإن:

$$(1 - |z|^2)(1 - |\alpha|^2) > 0$$

وبما أن $|z| < 1, |\alpha| < 1$ فإن

$$(1 - |z|^2) > 0, (1 - |\alpha|^2) > 0$$

وهذا ينهي إثبات أن $|f(z)| < 1$.

أي أن هذه الدالة تنقل القرص المفتوح $|z| < 1$ الى القرص المفتوح $|w| < 1$. وبما أن $|\lambda| = 1$ فإنها تأخذ الشكل $\lambda = e^{\theta i}$ حيث إن $\theta = \arg \lambda$ وبالتالي فإن الدالة (٧ ـ ٣٢) تأخذ الشكل التالي:

$$f(z) = e^{-\theta i} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \quad \text{(٧ ـ ٣٣)}$$

لاحظ كذلك أن $f(\alpha) = 0, f(0) = \alpha \bar{\lambda}$ وأن $g(0) = \alpha$. المثال التالي يبين كيف يمكن الاستفادة من تركيب الدوال للحصول على صورة محددة.

مثال ١٦:

بين أنه يمكن أن تنقل المنطقة الهلالية المعرفة في المثال ١٤ الى كل المستوى المركب uv.

الحل:

يمكن الاستفادة من مثال ١٤ كخطوة أولى حيث إن الدالة:

$$w = f(z) = \frac{-i(z+2)}{z-2}$$

تنقل المنطقة الهلالية الى الشريحة:

$$R = \{w: 0 < \text{Im } w < 1\}$$

والآن ننتقل الى الخطوة الثانية وهي إيجاد دالة تنقل الشريحة R الى كل المستوي المركب وهنا نفكر بدالة دورية مثل e^z ولكن هذه الدالة تنقل الشريحة $\{ z: 0<\text{Im } z < \pi \}$ إلى كل المستوي المركب وبتعديل الدالة e^z لتصبح $g(z) = e^{\pi z}$ فإنها أي الدالة g تنقل الشريحة R إلى المستوي المركب وبإيجاد تركيب الدالتين g,f نحصل على الدالة المطلوبة وهي :

$$h(z) = gof(z) = e^{\frac{\pi i(z+2)}{z-2}}$$

مثال ١٧ :

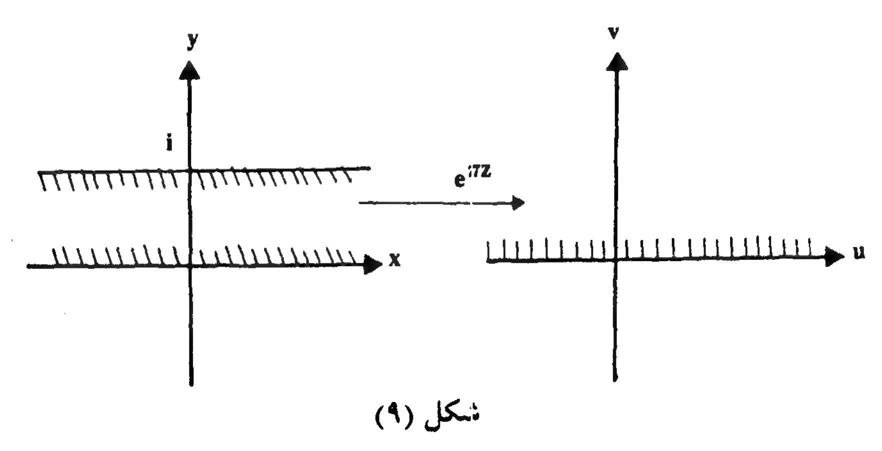
بيِّن أنه يمكن أن نجد دالة تنقل شريحة مثل :

$$R = \{z: 0 < \text{Im } z < 1\}$$

الى قرص مثل $|z+1| < 1$

الحل:

تبيّن لنا أن الدالة $f(z) = e^{\pi z}$ تنقل الشريحة R الى نصف المستوي المركب



شكل (٩)

العلوي. يمكن بالأساليب التي اتبعت في الأمثلة السابقة: إيجاد دالة مزدوجة الخطية تنقل نصف المستوي المركب العلوي الى القرص $|z + 1| < 1$ مثل :

$$g(z) = \frac{-2z + 2}{(1 + i)\, z - (1 - i)}$$

وبالتالي فإن تركيب الدالتين يحقق المطلوب وهو:

$$h(z) = g\,(f(z)) = \frac{-2e^{\pi z} + 2}{(1+i)\, e^{\pi z} - (1 - i)}$$

والذي ينقل الشريحة R الى القرص $|z+1| < 1$.

مثـــال ١٨ :

بين أن الدالة:

$$h(z) = \frac{2}{\pi} \ \mathrm{Log} \frac{i + z}{i - z}$$

تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ الى الشريحة R حيث

$$R = \{w: -1 < \mathrm{Im}\, w < 1\}$$

الحـــل:

من الواضح الدالة h عبارة عن تركيب دالتين وهما:

$$g(z) = \frac{2}{\pi} \ \mathrm{Log}\, z, \quad f(z) = \frac{i + z}{i - z}$$

ونترك للقارىء أن يبين أن الدالة f تنقل قرص الوحدة الى النصف الأيمن من المستوي المركب أما الدالة g فإنها تنقل نصف المستوي هذا للشريحة المـذكورة R ونترك تفصيل ذلك للقارىء.

وهكـذا يتبين لنـــا كيف يمكن إيجـاد دوال تنقـــل أي مجـال الى مجــال آخـر باستخدام تركيب دالة مـزدوجة الخـطية والـدوال الأساسيـة مثل الـدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية وغيرها.

تمارين ٧ ـ ٣

١ ـ أكمل حل مثال ١٣ بأن تبيّن أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تنقل المعادلة $\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ الى المعادلة $\delta(u^2+v^2)+\beta u-\gamma v+\alpha=0$ حيث إن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أعداد حقيقية بحيث إن $\beta^2-\gamma^2>4\alpha\delta$. لاحظ أن المعادلة الأولى تمثل دائرة اذا كانت $\alpha \neq 0$ ومستقيماً إذا كانت $\alpha = 0$. وعليه فإن المعادلة الثانية كذلك تمثل دائرة إذا كانت $\delta \neq 0$ وتمثل خطاً مستقيماً إذا كانت $\delta = 0$.

٢ ـ استفد من التمرين السابق لإثبات أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تنقل الخطوط المستقيمة الأفقية الى دوائر مراكزها تقع على المحور التخيلي وكذلك الخطوط المستقيمة الرأسية الى دوائر مراكزها تقع على المحور الحقيقي.

اقتراح: الخط المستقيم الأفقي يوازي المحور الحقيقي x وتكون معادلته $y+\delta=0$ حيث تكون α, β أصفاراً و $\gamma = 1$ وبالمثل يمكن معالجة الخط المستقيم الرأسي.

٣ ـ جد صورة ما يلي تحت الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$

أ ـ $|z+1| = 1$

ب ـ $|z-i| = 1$

جـ ـ $\text{Im}\, z = 2$

د ـ $\text{Re}z = -1$

٤ ـ بين أن الدالة:

$$f(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$$

تنقل القرص $|z+1| < 1$ الى نصف المستوي العلوي

$\text{Im}.\, w > 0$

٥ ـ جد صورة الدائرة $|z-1| = 1$ والمنطقة الداخلية لها تحت الدوال التالية:

أ ـ $f(z) = z - i$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب ـ $f(z) = -iz$

جـ ـ $f(z) = \frac{3z-4}{z-1}$ ‏ ‏ ‏ ‏ د ـ $f(z) = \frac{z-2}{z+1}$

٦ ـ جد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط z_1, z_2, z_3 الى w_1, w_2, w_3 على الترتيب فيما يلي:

أ ـ $0, i, -i$ الى $-1, 1, 0$

ب ـ $0, 1, 2$ الى $0, 1, \infty$

جـ ـ $0, 1, \infty$ الى $-i, \infty, 1$

د ـ $-1, i, 1$ الى $-i, 0, i$

٧ ـ جد الدالة العكسية للدوال التي حصلت عليها في التمرين السابق.

٨ ـ بين أن الدالة $f(z) = \frac{i+z}{i-z}$ تنقل قرص الوحدة الى نصف المستوي الأيمن أي $\text{Re. } w > 0$.

٩ ـ جد دالة تنقل المنطقة الهلالية الواقعة داخل الدائرة $|z-2| = 2$ وخارج الدائرة $|z-1| = 1$ الى شريحة أفقية.

١٠ ـ جد دالة مزدوجة الخطية f تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ الى نصف المستوي الأيمن $\text{Re. } w > 0$ بحيث إن $f(-i) = 0$.

١١ ـ جد دالة مزدوجة الخطية تنقل النصف السفلي للمستوي الى القرص $|z-1| < 1$

١٢ ـ بين أن الدالة $f(z) = e^z$ تنقل المنطقة المستطيلة R حيث:

$$R = \{z: \alpha < \text{Re } z < \beta, \gamma < \text{Im. } z < \delta\}$$

الى المنطقة الحلقية S حيث إن:

$$S = \{re^{\theta i}: e^{\alpha} < r < e^{\beta}, \gamma < \theta < \delta\}$$

١٣ ـ بين أن الدالة:

$$f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$$

تنقل الشريحة R حيث

$$R = \{z: 0 < \text{Im. } z < \pi\}$$

الى قرص الوحدة $|w| < 1$.

١٤ ـ بين أن الدالة:

$$f(z) = \text{Log } \frac{1+z}{1-z}$$

تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ الى الشريحة R حيث

$$R = \left\{w: -\frac{\pi}{2} < \text{Im. } w < \frac{\pi}{2}\right\}$$

١٥ ـ جد دالة تنقل المنطقة الهلالية المذكورة في التمرين ٩ الى كل المستوي المركب.

اقتراح: استعن بتمرين ٩ وكون الدالة $f(z) = e^z$ تنقل شريحة أفقية الى كل المستوي المركب.

١٦ ـ بين أن الدالة مزدوجة الخطية f التي تثبت النقطتين $-1, 1$ (أي $f(-1) = -1, f(1) = 1$) هي:

$$f(z) = \frac{z+\alpha}{\alpha z + 1}$$

حيث إن $\alpha = T(0) \neq \infty$.

١٧ ـ جد دالة مزدوجة الخطية تنقل الدائرة $|z| = 1$ الى الدائرة $|w-1| = 1$.

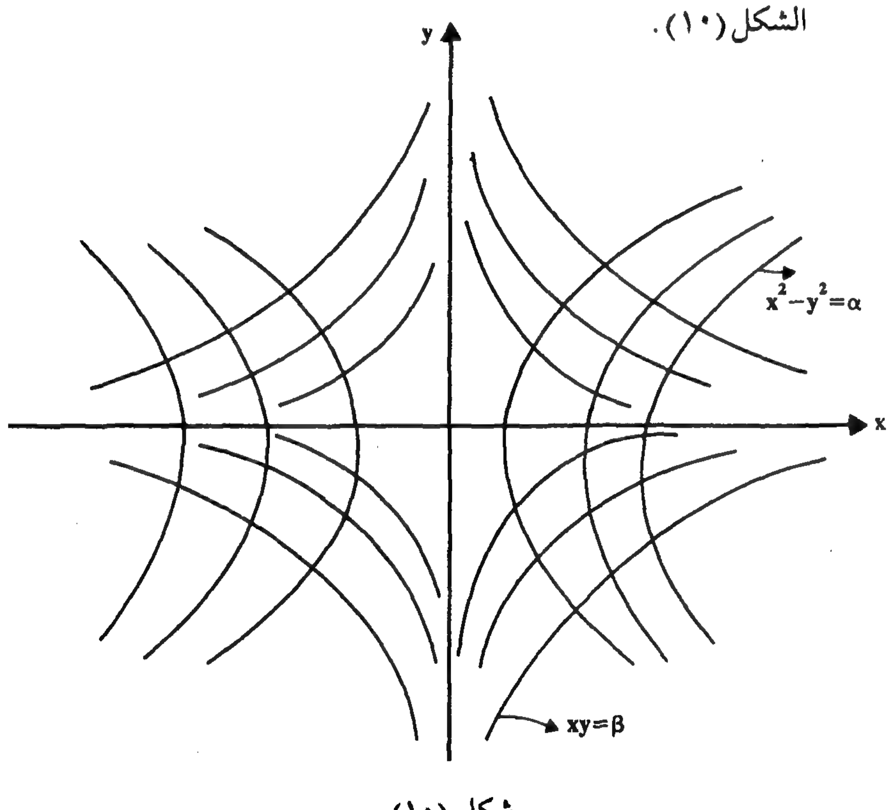
١٨ ـ جد دالة مزدوجة الخطية f تثبت النقطتين $0, 1$ بحيث إن $f(-i) = \infty$.

١٩ ـ جد دالة مزدوجة الخطية تنقل المحور الحقيقي x الى نفسه والمحور التخيلي y الى الدائرة $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

٢٠ ـ جد دالة مزدوجة الخطية تنقل المحور الحقيقي x الى نفسه والمستقيم $y = x$ الى الدائرة $|w+i| = \sqrt{2}$.

٢١ ـ بين أن منحنيات المستوي للدالة $f(z) = z^2$ تتقاطع بزاوية متعامدة وهي عائلتان من القطع الزائد.

اقتراح: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ نفرض أن $x^2 - y^2 = \alpha$ تحصل على إحدى العائلات وبفرض أن $2xy = \beta$ تحصل على العائلة الثانية. كما يبين الشكل (١٠).



شكل (١٠)

٢٢ ـ بيِّن أن مستوي المنحني للدالة

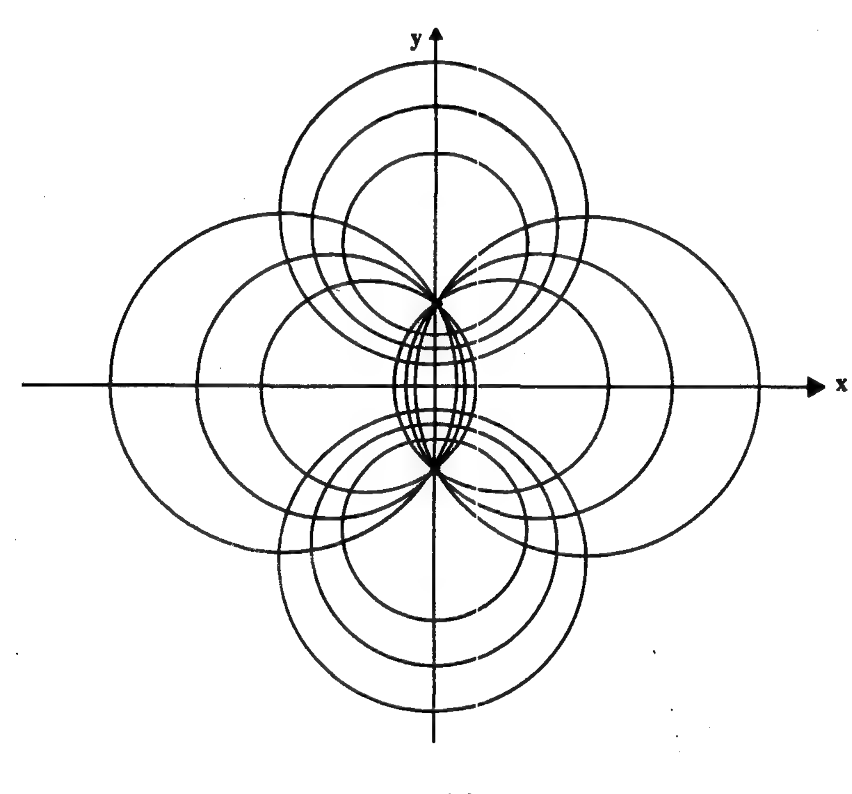
$$f(z) = \log \frac{z-1}{z+1}$$

عبارة عن عائلتين من الدوائر. إحداهما تمر دائماً في النقطتين $1, -1$.

اقتراح : بفرض أن الجزء الحقيقي للدالة مقدار ثابت نحصل على الدوائر : $|z-1| = \alpha |z+1|$, ($\alpha =$ ثابت) ؛ وبفرض أن الجزء التخيلي $\text{Im. } f$ مقدار ثابت نحصل على الدوائر

$$\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \beta$$

($\beta =$ مقدار ثابت) . ولها الشكل (١١) .

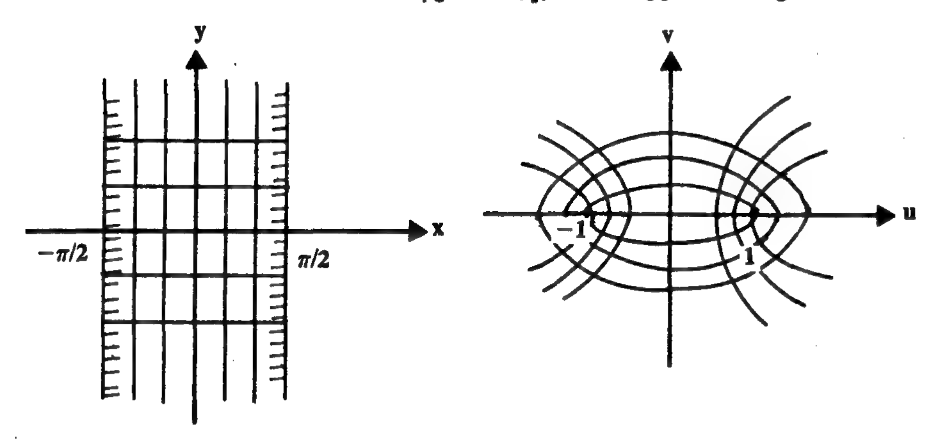


شكل (١١)

٢٣ ـ بين أن الدالة $f(z) = \sin z$ دالة مطابقة وواحد لواحد وتنقل الشريحة الرأسية R حيث $R = \left\{z: |\text{Re } z| < \frac{\pi}{2}\right\}$ الى المستوي المركب

باستثناء المستقيمين $u \leqslant -1, v = 0$ و $u \geqslant 1, v = 0$ وتنقل الخطوط المستقيمة الأفقية والرأسية في الشريحة R الى قطوع ناقصة وأخرى زائدة. كما في الشكل (١٢).

٢٤ ـ بين أن الدالة مزدوجة الخطية يمكن اعتبارها تركيباً لعدة دوال مثل الازاحة، الدوران، التكبير، المقلوب.



شكل (١٢)

٧ ـ ٤ تحويل شوارتز ـ كريستوفل (Schwartz-Christoffel)

في أمثلة الدوال المطابقة والدوال مزدوجة الخطية لاحظنا أنه يمكن أن نجد دالة تنقل نصف المستوي العلوي مثلاً الى قرص مفتوح أو العكس. هذه الحقيقة أثبتت من قبل العالم الالماني ريمان Riemann وعرفت باسمه وهي:

نظرية ٦ (نظرية تطبيق ريمان):

إذا فرض أن D مجال مترابط ترابطاً بسيطاً، مجموعة النقاط الحدودية له تتكون من نقطتين على الأقل (أي أن D يختلف عن المستوي نفسه) وكانت z_0 نقطة في المجال D فإنه يوجد دالة مطابقة واحد لواحد (تحليلية) f تنقل هذا المجال D الى قرص الوحدة $|w| < 1$ بحيث إن $f(z_0) = 0$ وأن هذه الدالة تتحدد تماماً بالشرط إن $f'(z_0) > 0$.

نقبل هذه النظرية بدون برهان ونترك برهانها لمستوى أعلى من هذا الكتاب. إذن مثل هذه الدالة دائماً موجودة وتنقل أي مجال يحقق شروط النظرية الى قرص الوحدة ويمكن أن نستنتج من ذلك أنه يمكن إيجاد دالة تحليلية وواحد لواحد تنقل أي مجال مترابط ترابطاً بسيطاً نقاطه الحدودية أكثر من نقطتين الى مجال آخر مثله.

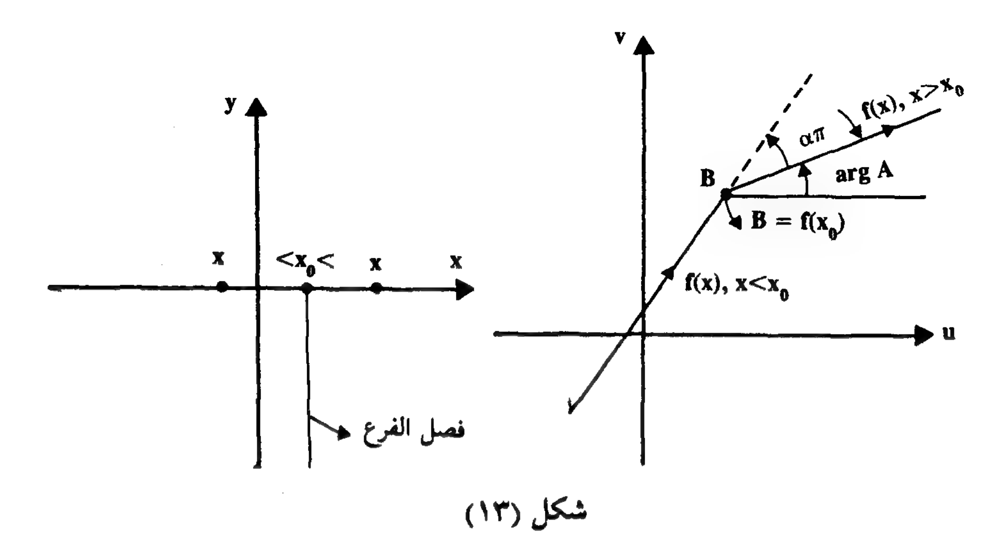
فهل يمكن أن نجد دالة تحليلية واحداً لواحد تنقل النصف العلوي من المستوي الى مجال محدود بمضلع ما. هذا ما أثبته العالمان شوارتز وكريستوفل (Schwartz-Christoffel).

وحتى نفهم كيفية إنشاء تحويل شوارتز ـ كريستوفل نمهد له بالمقدمة التالية:

نفرض أن لدينا دالة f تحقق الشرط

$$f'(z) = A\,(z-x_0)^{\alpha} + B, \quad \text{(٧ ـ ٣٤)}$$

بحيث إن α, x_0 أعداد حقيقية وإن $-1 < \alpha < 1$ و A, B أعداد مركبة ونريد أن ندرس تأثير هذه الدالة على المحور الأفقي x.



شكل (١٣)

من الـواضـح أن صـورة x_0 هي $w=B$ وأن الجـذر يمكن اختيـاره في الفـترة $\left(-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$ وذلك باعتبار أن الجزء السـالب من المستقيم $x=x_0$ محذوف لأنه يمثل فصل الفرع عند x_0.

ولايجاد صورة الأعداد الحقيقية x نفرض أولاً أن x أكبر من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg (x-x_0) + \arg A \quad \ldots \quad (٧ - ٣٥)$$

وبما أن $x-x_0$ موجبة فإن $\arg (x-x_0)$ التي تقع في الفترة المذكورة أعـلاه هي 0 وبالتالي فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha.0 + \arg A$$

وبما أن A عدد مـركب ثابت فـإن $\arg f'(x) = \arg A$ مقدار ثـابت، وعليه فإن صورة كل الأعداد التي تقع على يمين x_0 عبارة عن خط مستقيم يميـل بمقدار arg A عن المحور الحقيقي u. أما اذا كانت x أقل من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg (x-x_0) + \arg A.$$

وبما أن $x-x_0$ سالبـة (وحقيقة) فإن $\arg (x-x_0)$ التي تقع في الفـترة المذكـورة أعلاه هي π أي أن:

$$\arg f'(x) = \alpha\pi + \arg A$$

وهـذه القيمة ثـابتة أيضـاً. مما يـدل على أن صـور كل الأعـداد الحقيقيـة التي تقـع على يسار x_0 تقع على خط مستقيم ميله عن المحور الحقيقي u هو $\alpha\pi + \arg A$ والمستقيمان يلتقيان عند النقطة B التي تمثل صورة x_0.

اذا فهمنا ذلك فإنه من الممكن أن نتقدم خطوة أخـرى في التعميم للاقـتراب أكثر من المطلوب.

نفرض أن الدالة f تحقق الشرط:

$$(\text{٣٦ - ٧}) \quad \ldots \quad f'(z) = A\,(z-x_1)^{\alpha_1}\,(z-x_2)^{\alpha_2}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n}$$

بـحـيـث إن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ أعـداد حـقـيـقـيـة تحـقـق $k = 1, 2, \ldots, n$, $-1 < \alpha_k < 1$ وكذلك $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أعـداد حقيقية ولكن A عـدد مركب غـير الصفر بالـطبع وكـذلك $-\frac{\pi}{2} < \arg(z-x_k) < 3\frac{\pi}{2}$ لكـل $k = 1, 2, \ldots, n$.

ولدراسة تأثير هذه الدالة على المحور الحقيقي x فإن:

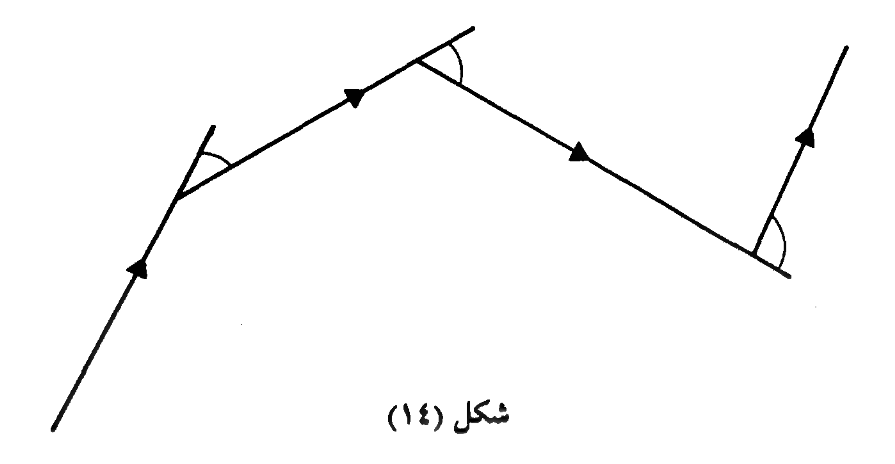
$$(\text{٣٧ - ٧}) \quad \ldots \quad \arg(f'(x)) = \arg A + \alpha_1 \arg(x-x_1) + \alpha_2 \arg(x-x_2) + \ldots + \alpha_n \arg(x-x_n).$$

واذا فـرضنـا أن صـور الأعـداد الحقيقيـة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي عـلى الـترتيب $W_1, W_2, \ldots, W_n$ فإن صور القطع المستقيمة هي قطع مستقيمة أخـرى زوايا ميلهـا كما يلي:

الفترة	زاوية الميل
$(-\infty, x_1)$	$\arg A + \alpha_1\pi + \alpha_2\pi + \ldots + \alpha_n\pi$
(x_1, x_2)	$\arg A + \alpha_2\pi + \alpha_3\pi + \ldots + \alpha_n\pi$
....	....
(x_{n-1}, x_n)	$\arg A + \alpha_n\pi$
(x_n, ∞)	$\arg A$

وذلك بتطبيق المقدمة من أسفل الى أعلى.

مما تقدم يتبين لنا أن الدالة f تنقل المحور الحقيقي x الى مضلع.

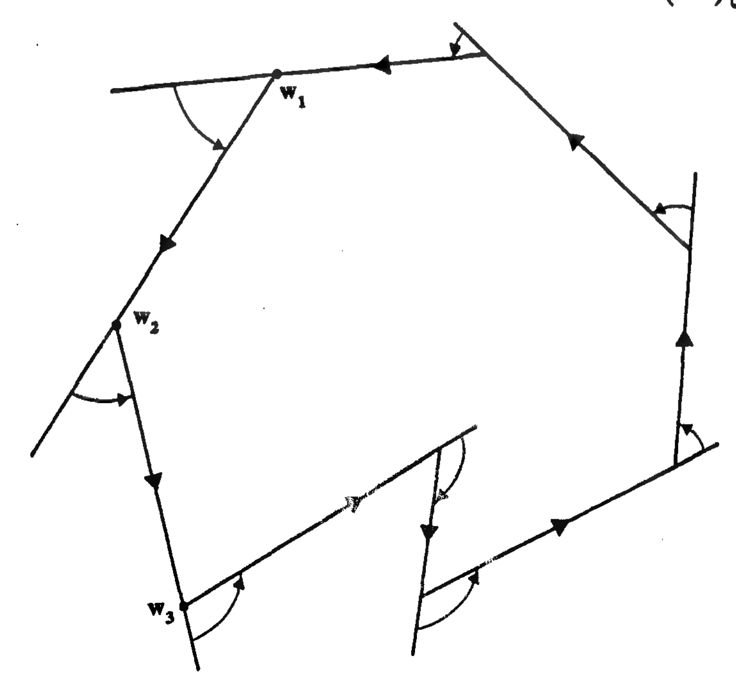


شكل (١٤)

ولايجاد الدالة f فإنها معرفة بالمساواة التالية

$$f(z) = A \int_0^z (s-x_1)^{\alpha_1} . (s-x_2)^{\alpha_2} \ldots (s-x_n)^{\alpha_n} ds + B \quad \ldots \quad (٣٨ - ٧)$$

وحتى نضع هذه المناقشة بالشكل الاصطلاحي لتحويل شوارتز - كريستوفل نريد أن نجد المضلع الموجب الاتجاه وبالتالي تكون الحركة عكس عقارب الساعة كما هي مبينة بالشكل (١٥).



شكل (١٥)

فيكون قياس الزوايا (زوايا الميل) من الخارج الى الداخل أي عكس عقارب الساعة ونكون بذلك قد درنا دورة كاملة مقدارها 2π. فإذا فرضنا بدلاً من $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الزوايا $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ التي مجموعها 2π بحيث إن: $-\pi < \theta_k < \pi$ فإن $\alpha_k = -\frac{\theta_k}{\pi}$ (لأن $-1 < \alpha_k < 1$) وكذلك إذا فرضنا أن $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ (بحذف x_n حتى يمكن أن نفرضها لتساوي الرمز ∞) بحيث إن:

$$w_1 = f(x_1),\ w_2 = f(x_2), \ldots,\ w_{n-1} = f(x_{n-1}),$$

$$w_n = f(\infty)$$

فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = A \int_0^z (s-x_1)^{-\theta_1/\pi} (s-x_2)^{-\theta_2/\pi} \ldots (s-x_{n-1})^{-\theta_{n-1}/\pi} dx + B. \quad \cdots (٧ - ٣٩)$$

وهذه الدالة تسمى تحويل شوارتز ـ كريستوفل.

نظرية ٧ (نظرية شوارتز ـ كريستوفل):

اذا كان K مضلعاً في المستوي له الرؤوس $w_1, w_2, \ldots, w_n$ بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) وكانت زواياه الخارجية هي على الترتيب $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ فإنه يوجد أعداد حقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ وعدد مركب A بحيث إن الدالة f المعرفة بالمساواة (٧ ـ ٣٩) تنقل نصف المستوى العلوي بشكل واحد لواحد الى المنطقة الداخلية للمضلع K بحيث إن:

$$w_1 = f(x_1),\ w_2 = f(x_2), \ldots,\ w_{n-1} = f(x_{n-1}),\ w_n = f(\infty)$$

بحيث إن $w_n = f(\infty)$ تفهم على أنها:

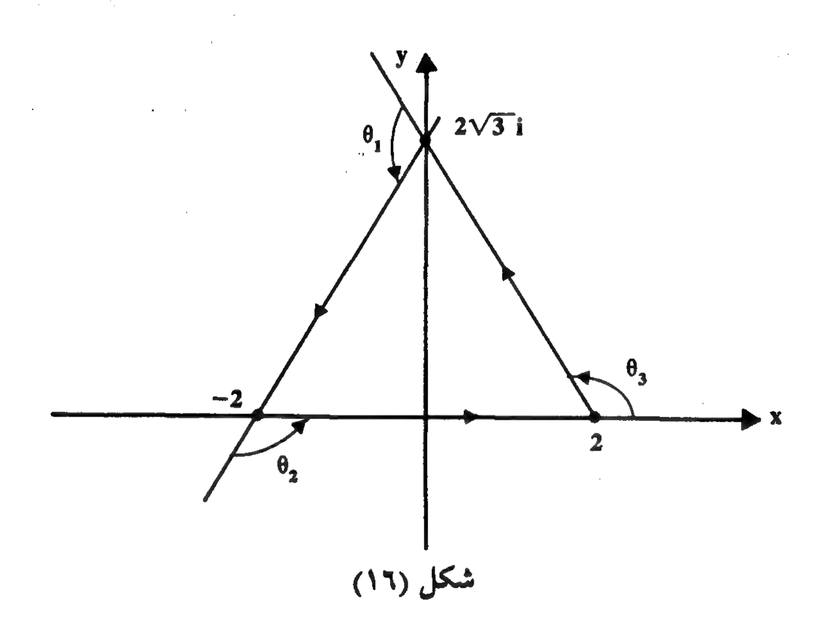
$$f(\infty) = w_n = \lim_{|x| \to \infty} f(x)$$

نترك برهان هذه النظرية لمستوى أعلى من هذا الكتاب. ونكتفي بالمقدمة

التي شرحت للحصول على هذه الدالة. ونترك تفاصيل إيجاد تحويلات شوارتـز ـ كريستوفل للأمثلة التالية: وسنترك تطبيقات هذا التحويل للبند القادم.

مثـال ١٩:

جـد تحويـل شوارتـز ـ كريستـوفل الـذي ينقـل نصف المستـوي العلوي الى المنطقة الداخلية للمثلث المتساوي الأضلاع الذي رؤوسه $-2, 2, 2i\sqrt{3}$.



شكل (١٦)

الحـل:

من كون المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الخارجية هي $2\pi/3$ لذلـك فإن $\theta_k = 2\pi/3, k=1, 2, 3$. ولتسهيل العمليات الحسابية نختار قيماً مناسبة للمتغـير x مثـلاً $x_1 = -1, x_2 = 1$ فتكـون $-2 = f(-1), 2 = f(1), 2i\sqrt{3} = f(\infty)$ حتى يكون الترتيب موجباً (عكس عقارب الساعة) وعليه فإن العلاقة (٧ ـ ٢٩) تبين أن الدالة هي:

$$f(z) = A\int_0^z (s-x_1)^{-\theta_1/\pi}(s-x_2)^{-\theta_2/\pi}ds + B$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$f(z) = A\int_0^z (s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}ds + B$$

وحتى نجد الثابتين A, B نستخدم الشروط الحدودية وهي:

$f(1) = 2, f(-1) = -2$ لنحصل على ما يلي:

$$-2 = f(-1) = A \int_0^{-1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\, ds + B,$$

$$2 = f(1) = A \int_0^{1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\, ds + B$$

ولاكمال الحل ننوه الى ضرورة الاستفادة من جداول التكامل في التفاضل والتكامل ما أمكن، أو نترك أمر ايجاد مثل هذه التكاملات للتفاضل والتكامل توفيراً للوقت. فإذا فرضنا أن:

$$\beta = \int_0^{1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\, ds, \alpha = \int_0^{-1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\, ds$$

فإن الثوابت تأخذ القيم التالية:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{\alpha - \beta},$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ \beta & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha - \beta},$$

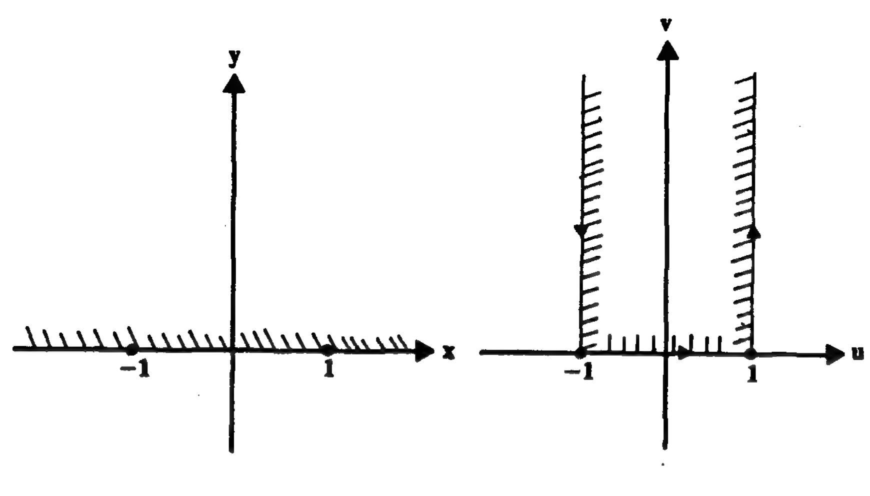
مثــال ٢٠:

جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل النصف العلوي للمستوي المركب $Im.\, z > 0$ الى نصف الشريحة اللانهائية R حيث

$$R = \left\{w: |Re.\, w| < 1, Im.\, w > 0\right\}.$$

الحـــل:

حدود هذه الشريحة كما تبدو في الشكل (١٧)



شكل (١٧)

لاحظ أن الزوايا الخارجية للمضلع المكـون لأضلاع الشريحـة R هي $\theta=\pi/2$ وأن $w_1 = -1, w_2 = 1$.

وباختيار القيم $x_1 = -1, x_2 = 1$ فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = A \int_0^z (s+1)^{-1/2} (s-1)^{-1/2}\, ds + B$$

$$= A \int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\, ds + B$$

ولايجاد قيم الثوابت A, B نستفيد من الشروط الحدودية وهي $w_1 = f(x_1)$, $w_2 = f(x_2)$ وعليه فإن

$$-1 = f(-1) = A \int_0^{-1} \frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\, ds + B;$$

$$1 = f(1) = A \int_0^1 \frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\, ds + B.$$

وبايجاد قيمة التكامل:

$$\frac{1}{i}\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = \frac{-1}{i} \sin^{-1} s \Big|_{-1}^{0}$$

$$= -i \sin^{-1}(-1),$$

$$= i \sin^{-1}(1),$$

$$\frac{1}{i}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = \frac{1}{i} \sin^{-1} s \Big|^{0}$$

$$= -i \sin^{-1}(1).$$

ومن ذلك فإن:

$$-1 = A(i \sin^{-1} 1) + B,$$

$$1 = A(-i \sin^{-1} 1) + B,$$

وهذا يعني أن:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i \sin^{-1} 1 & 1 \\ -i \sin^{-1} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2i}{\pi}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} i \sin^{-1} 1 & -1 \\ -\sin^{-1} 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i \sin^{-1} 1 & 1 \\ -i \sin^{-1} 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

وبذلك فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = \frac{2i}{\pi}\int_0^{z} \frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\, ds$$

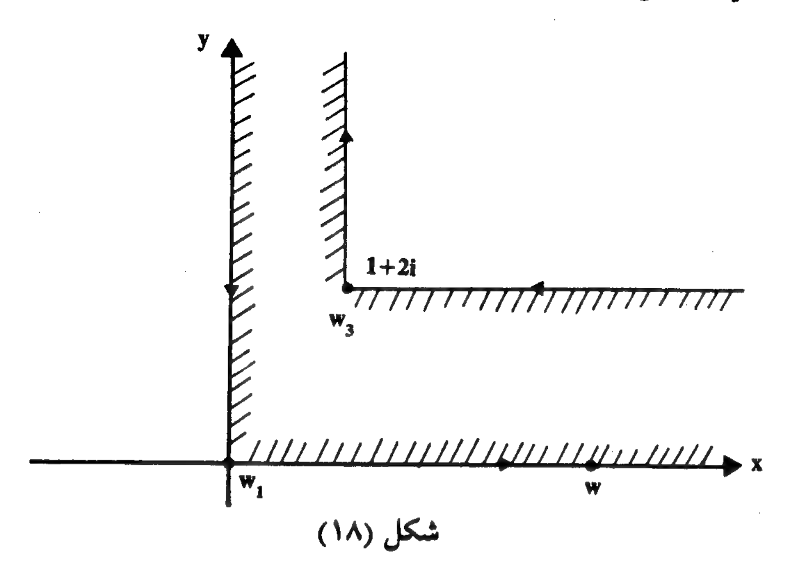
أي أن:

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} z.$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثـــال ٢١ :

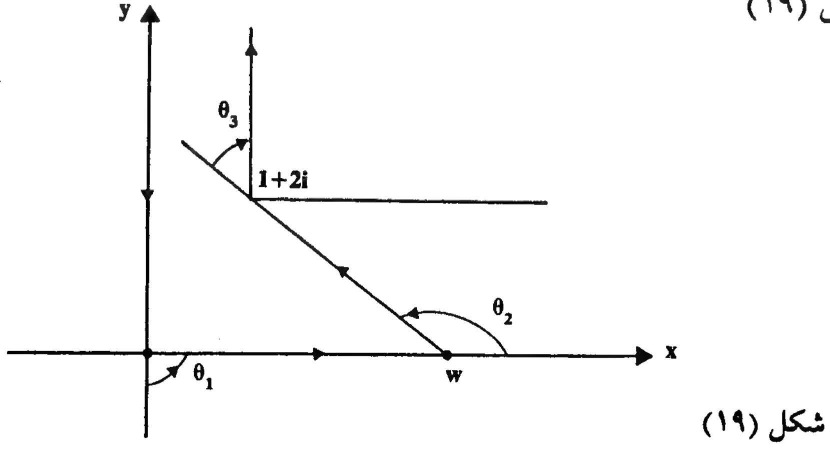
جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي الى **التفق** الظاهر في الشكل (١٨)



شكل (١٨)

الحـــل:

واضح أن النقاط التي تمثـل زوايا المضلع هـامة وفي الشكـل (١٨) ظاهـر لنا زاويتان لذلك نفرض أن الزاوية الأخرى هي ∞ وقبل ذلك نفرض نقطة w على المحـور u تمثل الـزاوية الثـالثة لكي يكتمـل المضلع المطلوب كـما هو واضـح في الشكل (١٩)



شكل (١٩)

فتكـون الـزوايـا الخـارجيـة للمضلع هي عـلى الـترتيب $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ حيث إن $\theta_1 = \pi/2$ واذا تركنا w تقترب من الرمز ∞ فإن الزاوية θ_2 تقـترب من π وبما أن اتجاه السهم للزاوية θ_3 مع عقارب الساعة فهي إذن سالبة وعندما تقترب w من ∞ فإن θ_3 تقترب من $(\pi/2 -)$ وعليه فإن الزوايا هي عـلى الترتيب $\pi/2, \pi, -\pi/2$ واذا اخترنا النقاط $-1, 0, 1$ فإن الدالة المطلوبة هي :

$$f(z) = A \int_0^z (s+1)^{-\pi/2\pi} (s-0)^{-\pi/\pi} (s-1)^{\pi/2\pi} ds + B$$

حيث إن :

$$f(1) = 1 + 2i, f(-1) = 0, f(0) = \infty$$

ولذلك فإن :

$$f(z) = A \int_0^z (s+1)^{-1/2} s^{-1} (s-1)^{1/2} ds + B$$

ولإيجاد الثوابت B, A نجـد قيمة التكـامل عنـد الشروط الحدوديـة، ولإيجاد التكامل فإن :

$$\int_0^z \frac{\sqrt{s-1}}{s\sqrt{s+1}} ds = \int_0^z \frac{s-1}{s\sqrt{s^2-1}} ds.$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} ds - \int_0^z \frac{1}{s\sqrt{s^2-1}} ds$$

$$= \frac{1}{i} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds - \sec^{-1}s$$

$$= (-i \sin^{-1}s - \sec^{-1}s)\Big|_0^z$$

$$= -i \sin^{-1}z - \sec^{-1}z + \pi/2.$$

وعند الشروط الحدودية فإن :

$$0 = f(-1) = A \int_0^{-1} \frac{s-1}{s\sqrt{s^2-1}} ds + B;$$

وبالتالي فإن :

$$0 = A\left(i \sin^{-1}1 - \sec^{-1}(-1) + \frac{\pi}{2}\right) + B$$

$$= A\left(\frac{\pi}{2} i - \frac{\pi}{2}\right) + B,$$

$$= \frac{\pi}{2}(i-1)A + B.$$

وكذلك :

$$1 + 2i = f(1) = A\left(-i \sin^{-1}1 - \sec^{-1}1 + \frac{\pi}{2}\right) + B,$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)A + B$$

وعليه فإن :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)$$

وكذلك :

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 0 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1+2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}(1+2i)$$

ولذلك فإن التحويل المطلوب هو الدالة :

$$f(z) = \frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)\left\{-i \sin^{-1}z - \sec^{-1}z + \frac{\pi}{2}\right\} + \frac{1}{2}(1+2i)$$

$$= \frac{3i-1}{2\pi}\left(-i \sin^{-1}z - \sec^{-1}z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}(1+2i)$$

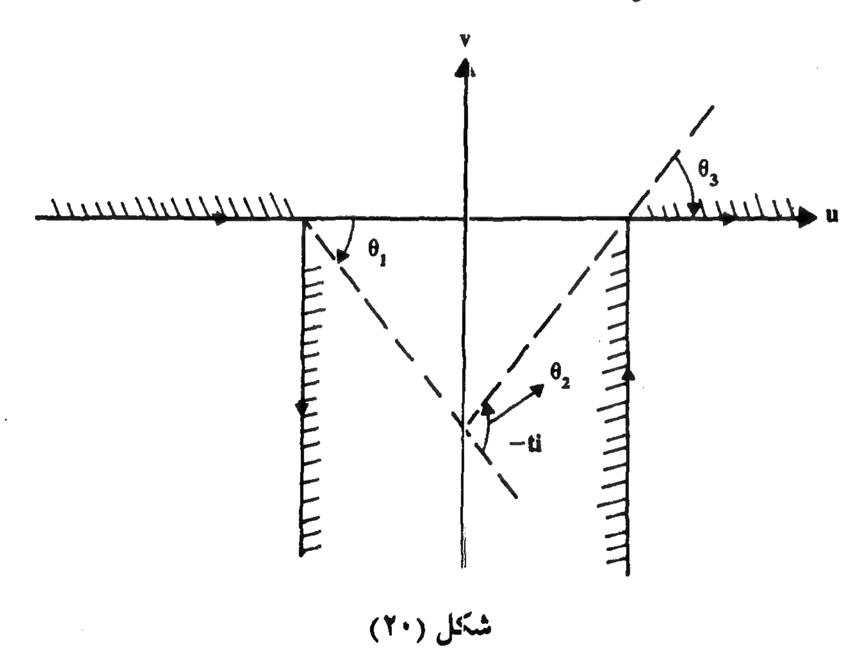
تمارين ٧ ـ ٤

١ ـ جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوى العلوي $Im. z > 0$ الى الشريحة اللانهائية R حيث:

$R = \{w: 0 < Im. w < 1\}$

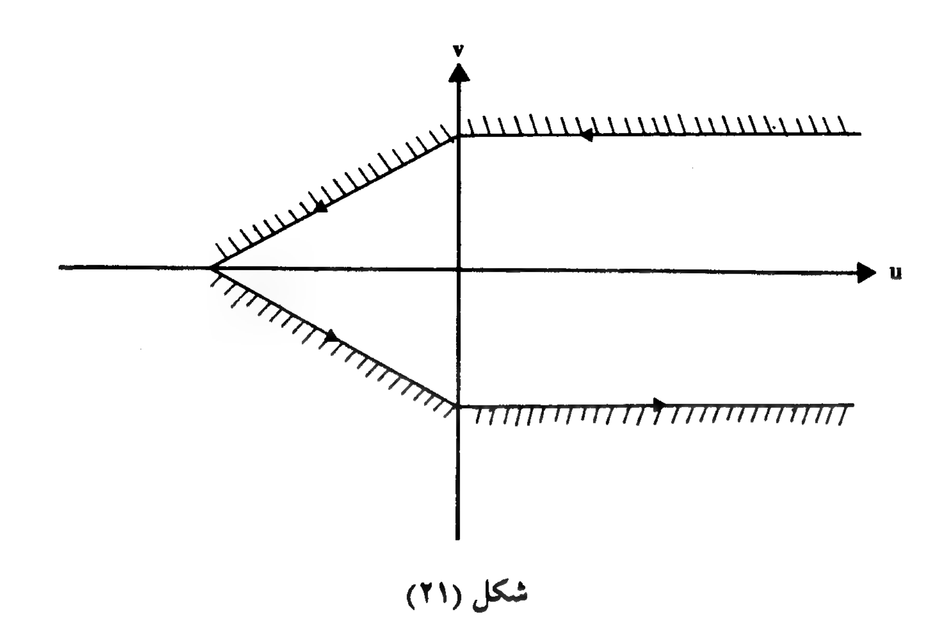
٢ ـ جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $Im. z > 0$ الى الشكل (٢٠)

اقتراح: افرض الزاوية الثالثة عند $-ti$, $t > 0$. ثم خذ النهاية عندما $t \to \infty$ لايجاد الزاوية الثالثة.



شكل (٢٠)

٣ ـ جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $Im. z > 0$ الى الشكل (٢١).



شكل (٢١)

٤ ـ جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الـذي ينقل النصف العلوي من المستـوى الى المجال D حيث

$$D = \left\{w: |Re.\ w| < \frac{\pi}{2}\ ,\ Im\ w < 0\right\}$$

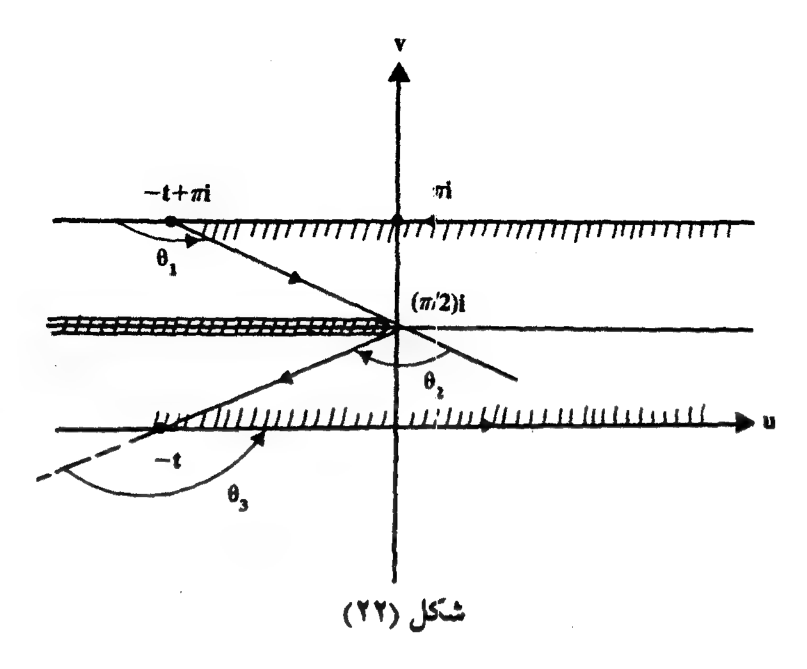
٥ ـ بيِّن أن الدالة

$$f(z) = \frac{1}{2}\ \log\left(z^2 - 1\right)$$

تنقـل النصف العلوي من المستـوي المـركب $Im.\ z > 0$ الى الشريحـة $R = \left\{w: 0 < Im.\ w < \pi\right\}$ باستثناء الشعاع $u \leqslant 0,\ v = \frac{\pi}{2}$

اقتراح: استعن بتحويل شوارتز ـ كريستوفل للشكل (٢٢)،

لاحظ الرؤوس الثلاثـة : لتجد الـزوايا لهـا اجعل t تقـترب من ∞ لتحصل عـلى المطلوب.

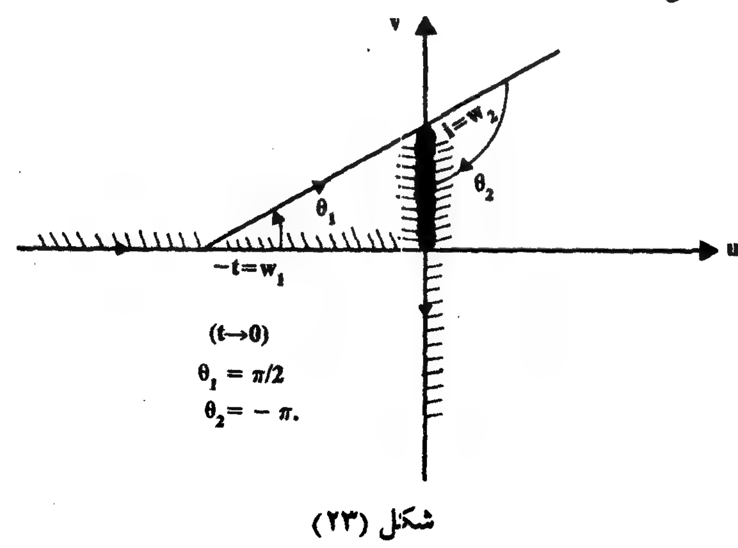


شكل (٢٢)

٦ ـ بيِّن أن الدالة

$$f(z) = \frac{-1}{2} \; i \, z^{1/2} (z-3)$$

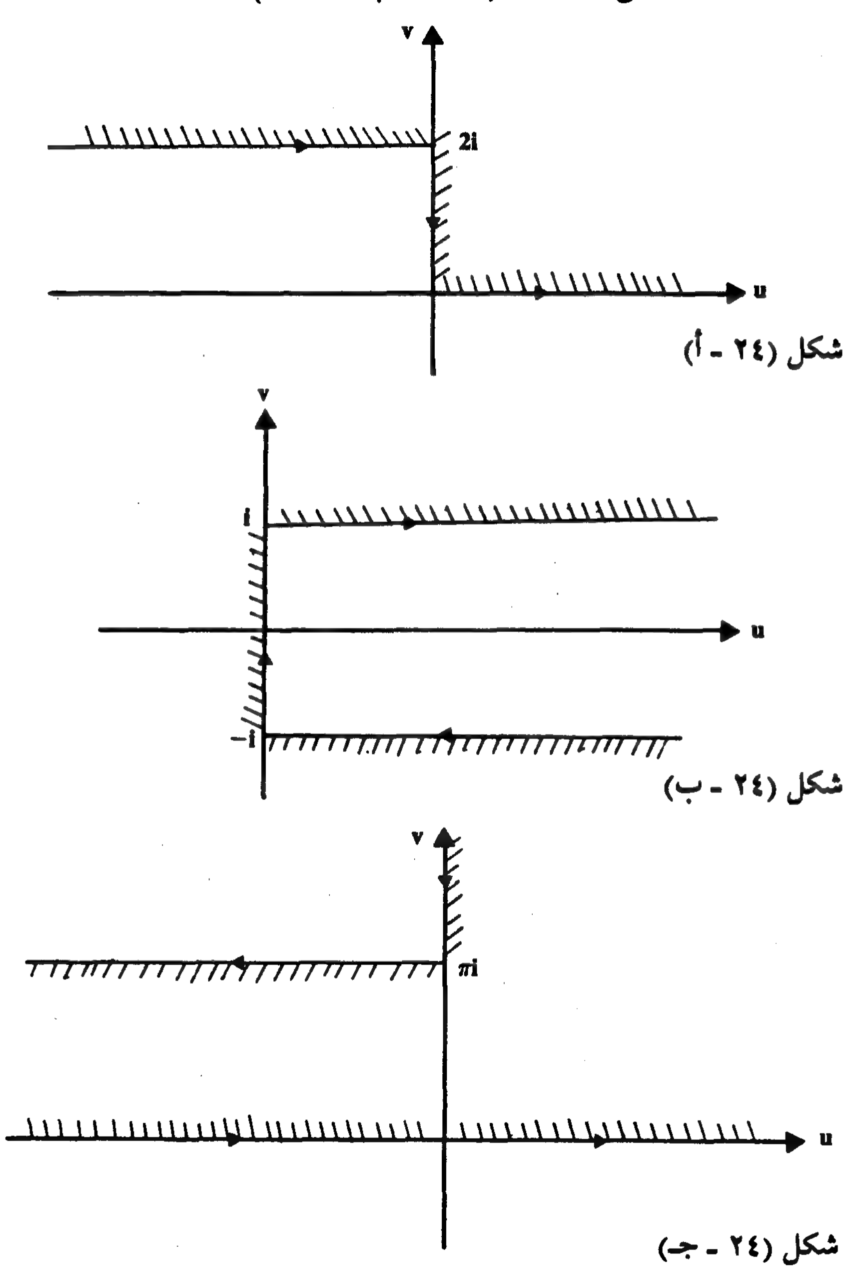
تنقل النصف العلوي للمستوي المركب Im. z > 0 الى القسم المظلل من الشكل (٢٣).



شكل (٢٣)

اقتراح: جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل للشكل.

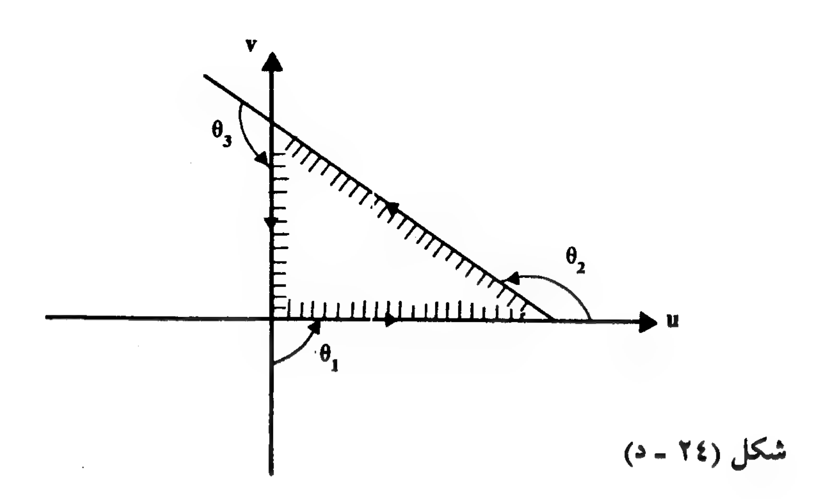
٧ ـ جد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $\text{Im. } z > 0$ الى الأشكال (٢٤ ـ أ، ب، جـ، د).



شكل (٢٤ ـ أ)

شكل (٢٤ ـ ب)

شكل (٢٤ ـ جـ)



شكل (٢٤ - د)

٧ ـ ٥ تطبيقات

نتناول في هذا البند أنواعاً مختلفة من تطبيقات الدوال المطابقة والتحليلية وسيكون تناولنا وصفياً وليس تحليلياً لكثرة التطبيقات وتمشياً مع الهدف الذي وضع من أجله الكتاب وهو كونه كتاباً رياضياً. ويستطيع القارىء المهتم بالتعمق في موضوع التطبيقات الرجوع الى العديد من المراجع التي تعالج الموضوع بالتفصيل والمذكورة في قائمة المراجع في آخر الكتاب. لذلك سنذكر نوع التطبيق ومثالاً عليه موضحاً بالرسوم ما أمكن وسنفترض أن الشروط الفيزيائية المثالية معتمدة في جميع الحالات وهي التي تحقق الشروط الحدودية أو الشروط الأولية دون أية تفصيلات لذلك.

أ ـ درجة الحرارة الثابتة (Steady State Temperatures)

إذا فرض أن درجة الحرارة لصفيحة تعتمد على الموضع في الصفيحة ولا تعتمد على الزمن فإن الدالة $T(x, y)$ التي تصف التوزيع الحراري في الصفيحة والتي تحقق الشروط الحدودية دالة توافقية أي أنها تحقق معادلة لابلاس:

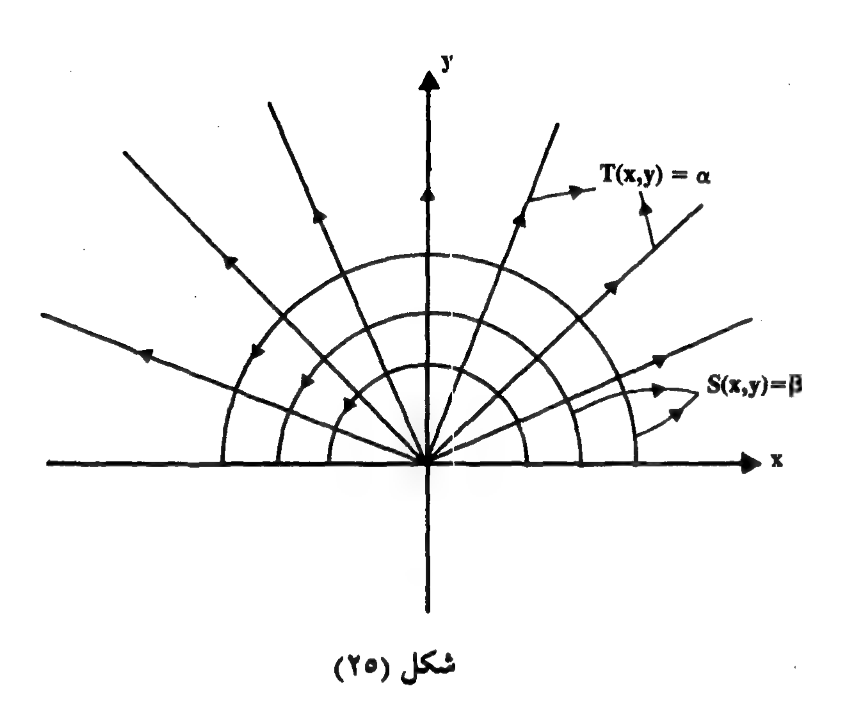
$$\nabla^2 T(x, y) = 0$$

وبالتالي فإنه يوجد دالة تحليلية $f(z)$ بحيث إن: $\text{Re. } f = T(x, y)$

وعليه فإنه يمكن أن تفسر بأنه لأيّ دالة تحليلية f فإن $\text{Re.} f$ يمثل دالة التوزيع الحراري الثابت. لنفرض أن المرافق التوافقي للدالة $T(x, y)$ وهو $\text{Im. } f = S(x, y)$ فإذا فرضنا أن $T(x, y) = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثلها هذه الدالة تسمى (Isothermal) خطوط تساوي الحرارة وكذلك إذا فرضنا أن $S(x, y) = \beta$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثلها هذه الدالة تسمى خطوط تدفق الحرارة heat flow lines ومن المعروف أن منحنيات المستوي لأي دالة توافقية ومنحنيات المستوي لدالة المرافق التوافقي لها تتقاطع متعامدة.

مثـال ٢٢ :

تبـين لنـا في تمـارين ٥ من الفصـل الثـاني أن أحـد فـروع $\log z$ تحليليـة في النصف العلوي للمستوى وأن منحنيات المستويات تمثل بالشكل (٢٥).



شكل (٢٥)

ب ـ الحقل الكهربائي :

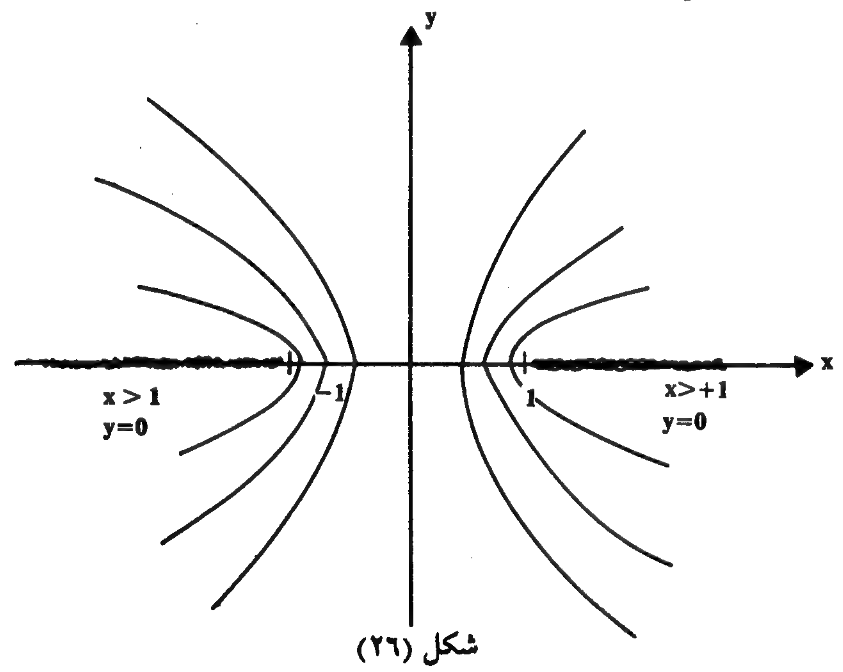
من المعروف أن الحقل الكهربائي $F(x, y)$(والذي يمكن أن يعرف بأنه القـوة المؤثرة على وحدة الشحنة الموجبة عنـد النقطة (x,y)) محافظ أي أنه يـوجد دالـة الجهـد الكهربـائي $\phi (x, y)$ بحيث إن $F(x, y) = - \nabla \phi (x, y)$ وبالتـالي فإن $\phi (x, y)$ توافقية ويـوجد لهـا مرافق تـوافقي مثل $S (x, y)$ لنحصـل على الـدالة التحليليـة $f(z) = \phi + Si$. أن منحنيـات المستـويـات $\phi (x, y) = \alpha$ حيث α مقـدار ثـابت تسمى خـطوط تسـاوي الجهـد وكـذلـك منحنيـات المستـوي $S (x, y) = \beta$ (حيث β مقدار ثابت) تسمي خطوط التدفق.

مثال ٢٣ :

من دراستنا السابقة للدوال المطابقة يمكن ان نستنتج أن الدالة $f(z)=\sin^{-1}z$ تنقل المستوي المركب باستثناء الشعاعين $|x| > 1, y = 0$ إلى الشريحة العمودية $-\frac{\pi}{2} < \text{Re. } w < \frac{\pi}{2}$ وبالتالي للحصول على دالة الجهد الكهربائي التي تحقق شروطاً حدودية نأخذ الجزء الحقيقي للدالة المطابقة f وهي :

$$\phi(x, y) = A \text{ Re. } \sin^{-1}z$$

حيث إن A ثابت توجد قيمته اعتماداً على الشروط الحدودية فإذا فرضنا أن $\phi(x, y) = A \text{ Re. } \sin^{-1}z = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثل هذه الدالة والتي تعرف باسم خطوط تساوي الجهد تمثل الشكل (٢٦)



شكل (٢٦)

جـ ـ تدفق السوائل :

اذا فرضنا أن لدينا سائلاً يتدفق على المستوي المركب فإن سرعة تدفق هذا السائل عند النقطة $z = x + yi$ هي : $F(x, y) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$

يهمنا هنا السائل الذي يحقق الشرطين: الأول أنه متساوي الاستمرار (equicontinuity). والذي يتحقق إذا كان $\nabla \cdot F = P_x + i\,Q_x = 0$

والشرط الثاني هو غير دوراني (Irrotational) والذي يتحقق اذا كان
$\nabla \times F = 0$

ومن ذلك تكون $Q_x - P_y = 0$

ومن هذه الشروط يمكن أن نستنتج أن الدالة
$f(z) = P+Qi$

تحليلية. فإذا فرضنا أن الدالة $h(z)$ هي أصل المشتقة للدالة f فإن:
$h(z) = \phi\,(x, y) + S\,(x, y)i$

ويمكن إثبات أن $\phi\,(x, y)$ تمثل دالة الجهد لتدفق السائل التي تحقق $\nabla\phi = F(x, y)$ وبالتالي فإن $\phi\,(x, y) = \alpha$ = مقداراً ثابتاً يعطي خطوط تساوي الجهد وكذلك $S\,(x, y) = \beta$ = مقداراً ثابتاً يعطي خطوط التيار للسائل.

مثال ٢٤:

يمكن إثبات أن الدالة المطابقة $f(z) = -\frac{1}{2}\, i\, z^{1/2}\,(z-3)$

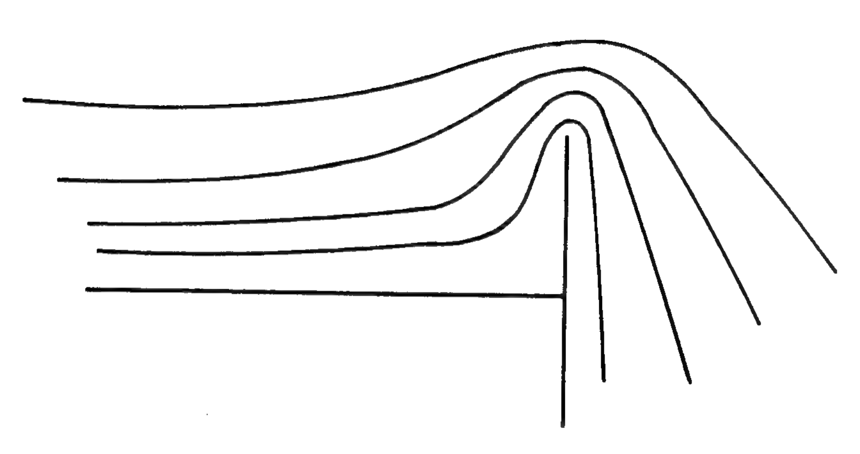
تنقل المستوى z الى الشكل (٢٧)

شكل (٢٧)

فتكون منحنيات المستوي للدالة

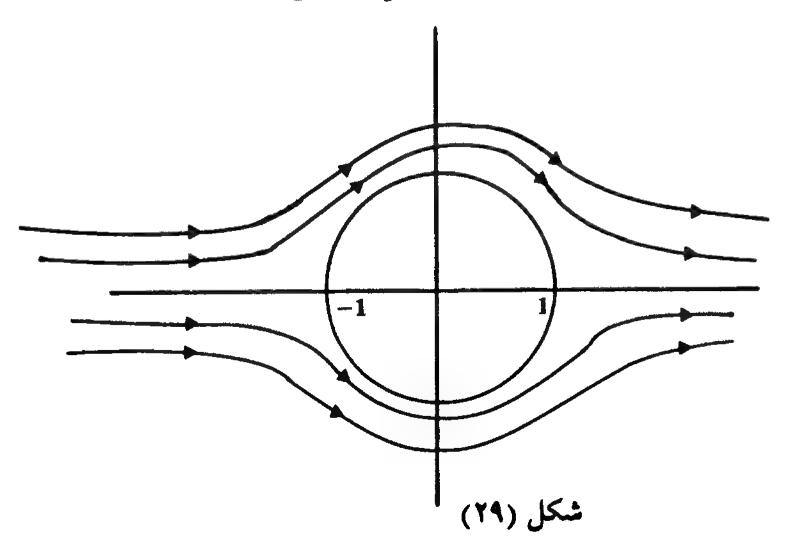
$$\phi (x, y) = A \text{ Re. } f(z)$$

(والتي يمكن ايجادها بالطرق المعروفة حيث إن A ثـابت توجـد قيمته اعتـماداً على الشروط الحدودية) تمثل خطوط تدفق سائل يواجه سداً كما في الشكل (٢٨)



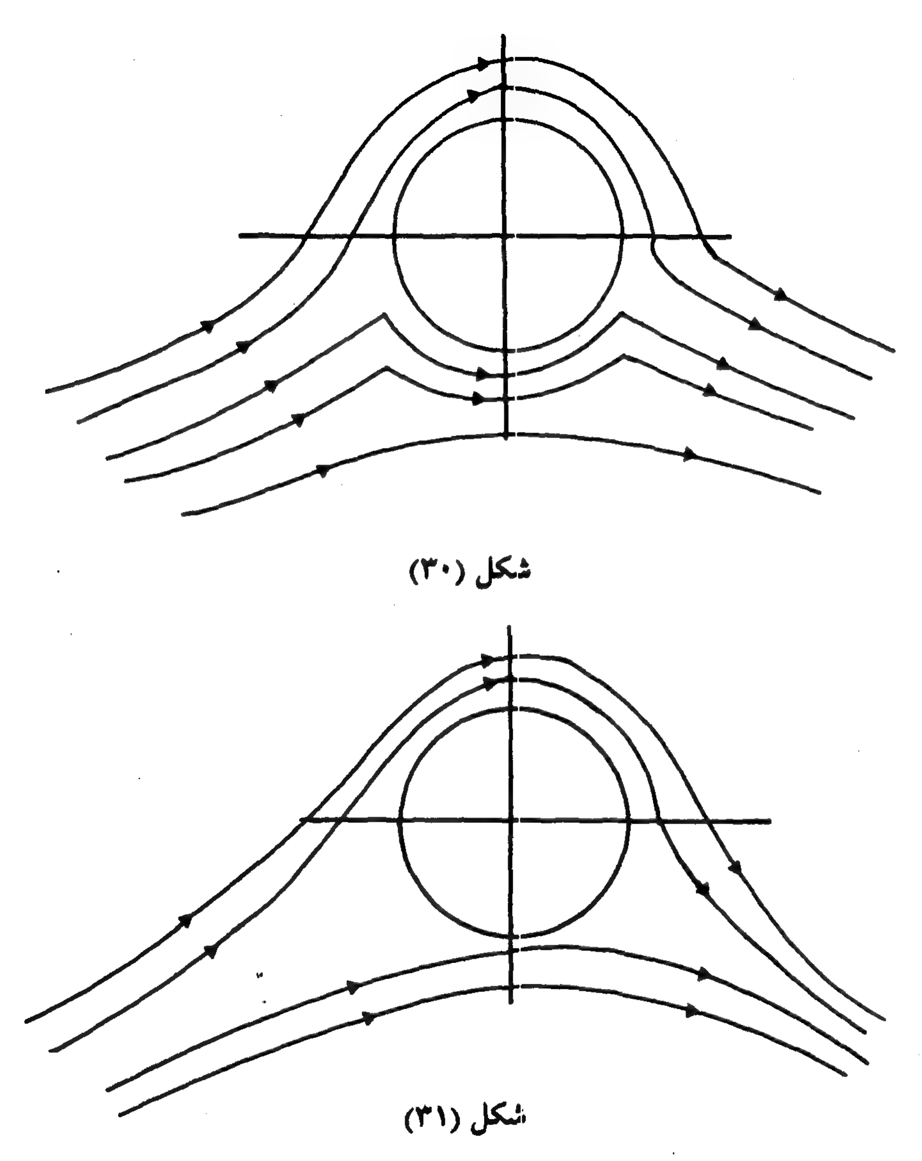
شكل (٢٨): تدفق سائل يواجه سداً

والشكل يكون ممتعاً حقاً اذا تخيلنـا أن ما يعيق حـركة السـائل جسم كـروي مثـلاً دائرة بـدلاً من سد فـإذا فرضنـا أن اتجاه التـدفق بـاتجـاه المحـور الحقيقي الموجب وعليه تكون خطوط التدفق كما في الشكل (٢٩)



شكل (٢٩)

أما اذا كان اتجاه تدفق السائل يميل بزاوية α على المحور الحقيقي فإن شكل خطوط التدفق تأخذ الأشكال التالية:



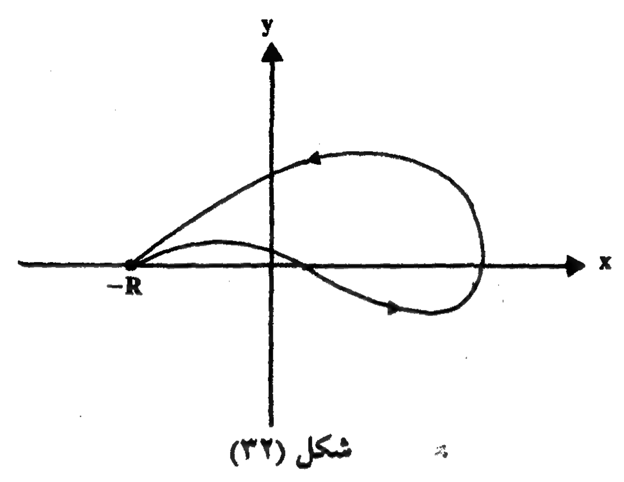
شكل (٣٠)

شكل (٣١)

وفي جميع هذه الحالات يمكن أن توجد معادلات للدوال التوافقية التي تمثل مثل خطوط التدفق هذه.

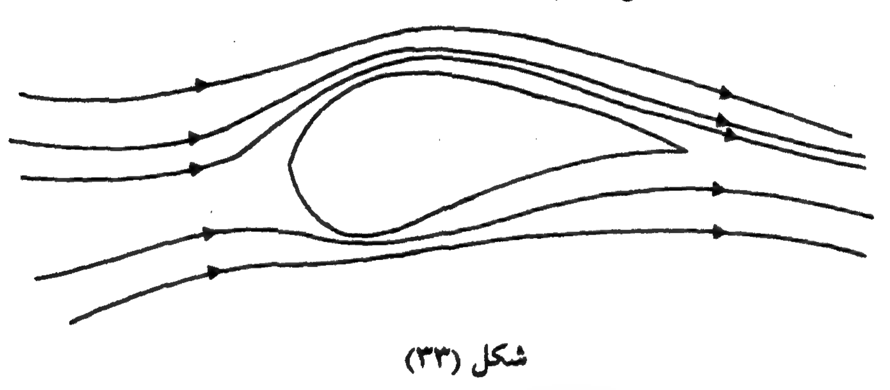
واعتماداً على نظرية تطبيق ريمان فإنه يمكن ايجاد دالة تحليلية مطابقة تنقل

قرص الوحدة أعلاه الى الشكل الذي يحده كانتور مغلق وبسيط وموجب **الاتجاه** مثل الشكل (٣٢).



شكل (٣٢)

إن مثل هذا الشكل قد يمثله نموذج جناح طائرة فتكـون خطوط التـدفق ممثلة لمقاومة الهواء مثلاً الشكل (٣٣).



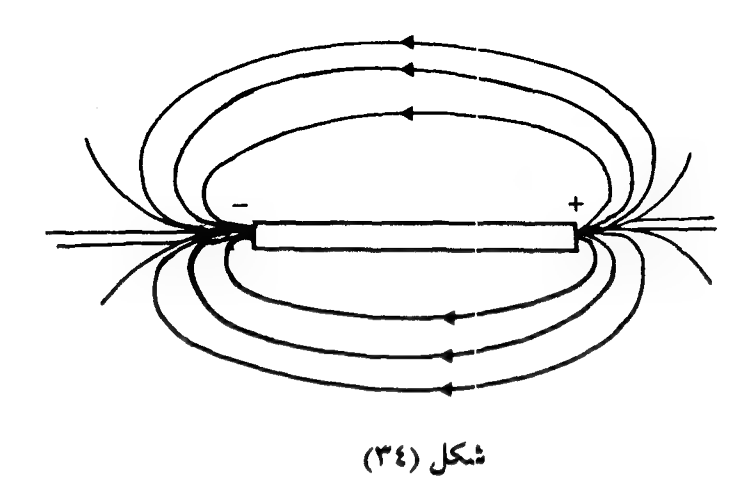
شكل (٣٣)

وقـد استطاع العـالم Joakowski أن يدرس ذلـك التطبيق وأثبت أنـه يأخـذ الشكل:

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z}$$

د ـ النبع والمصب:

من المعروف أن الحقل المغناطيسي يأخذ الشكل التالي



شكل (٣٤)

ويتميز بنقطة انطلاق وهي القطب الموجب ونقطة لقاء وهي القطب السالب. إن النقطة التي تنطلق منها الأشعة تسمى نبع والنقطة التي تلتقي فيها الأشعة تسمى مصب وبالتالي فإن حقل المجال المغناطيسي له نقطة نبع ونقطة مصب.

وكذلك يمكن أن يتكون أثناء حركة سائل ضمن شروط فيزيائية نموذجية (الشروط الحدودية) نقطة التقاء وهي مصب أو نقطة انطلاق وهي نبع.

مثال ٢٥:

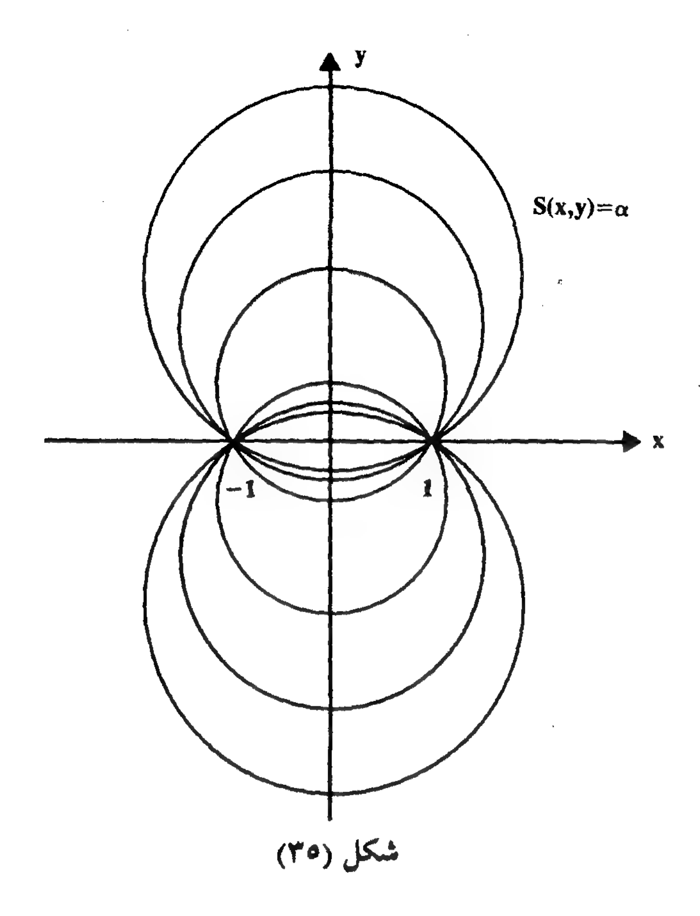
يمكن إثبات أن الدالة f(z) حيث، إن:

$$f(z) = \log \frac{z-1}{z+1}$$

دالة مطابقة عند النقاط z باستثناء النقطتين 1 ,1− وبدراسة دالة الجهد وهي $\phi(x, y) = \text{Re. } f$ وكذلك دالة التيار $S(x, y) = \text{Im. } f$ يمكن التعرف على أن النقطتين تمثلان نبع ومصب حيث إن:

$$S(x, y) = \text{Im. } f = \arg \frac{z-1}{z+1}$$

وبفرض أن $S(x, y) = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن خطوط التيار عبارة عن دوائر مراكزها على المحور التخيلي وجميعها تمر بالنقطتين 1+ ,1− كما في الشكل (٣٥)



شكل (٣٥)

مثـال ٢٦ :

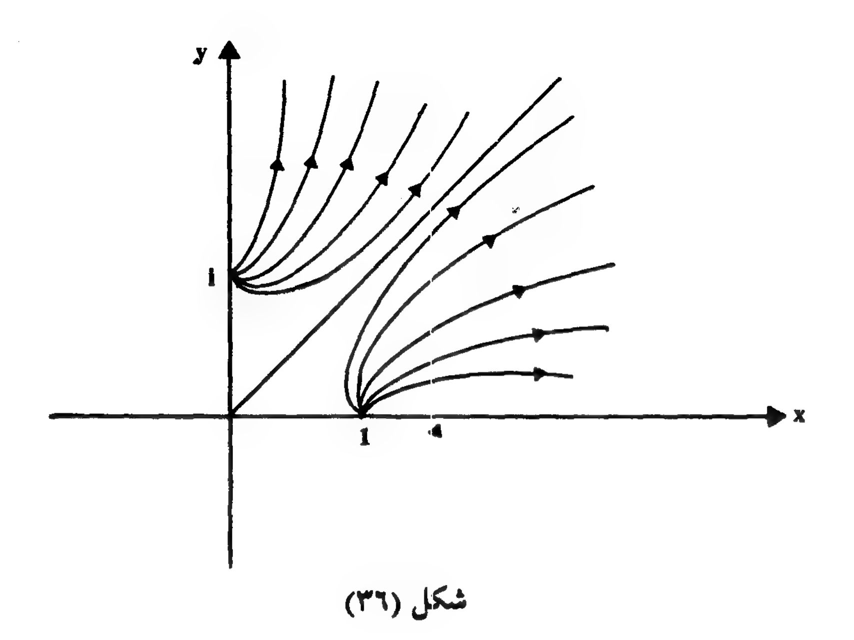
يمكن اثبات أن الدالة التحليلية :

$$f(z) = \log (z^4 - 1)$$

مـطابقة عنـد جميع النقـاط z ما عـدا النقطتـين i, 1 (لأن الدالـة غير معـرفة عندهما) وهما تمثلان نبعين وذلك بدراسة خـطوط التيار والتي تحـدد بايجـاد الجزء التخيلي من الدالة وتثبيت قيمته أي أن :

$$S(x, y) = \text{Im. } f = \arg (z^4 - 1) = \alpha$$

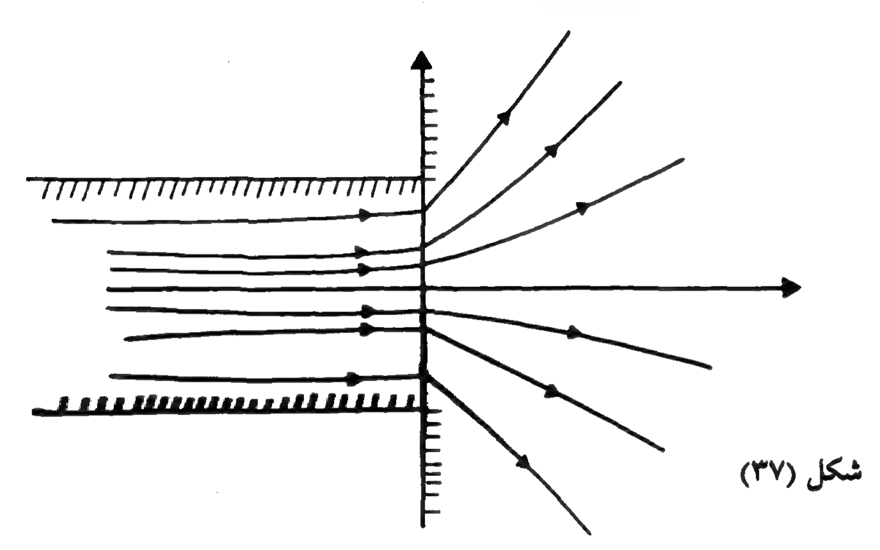
حيث α مقدار ثابت وبرسم هذه الدالة نحصل على الشكل (٣٦) :



شكل (٣٦)

تمارين ٧ ـ ٥

١ ـ جد باستخدام شوارتز ـ كريستوفل الدالة المطابقة التي تكون خطوط التدفق للجزء الحقيقي لها الشكل (٣٧):



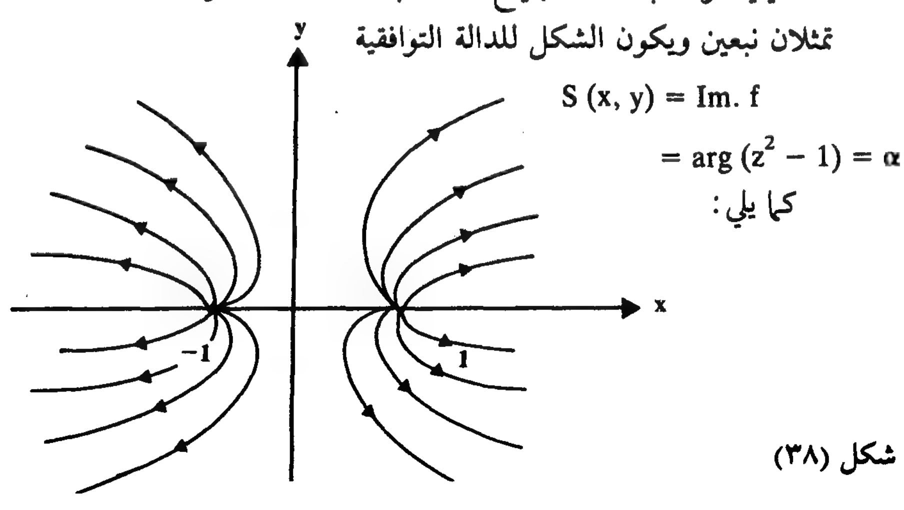
شكل (٣٧)

٢ ـ بين أن الدالة $f(z) = \log (z^2 - 1)$

التحليلية والمطابقة عند جميع النقاط باستثناء 1, 1− وهاتان النقطتان تمثلان نبعين ويكون الشكل للدالة التوافقية

$$S (x, y) = Im.\ f$$
$$= \arg (z^2 - 1) = \alpha$$

كما يلي:

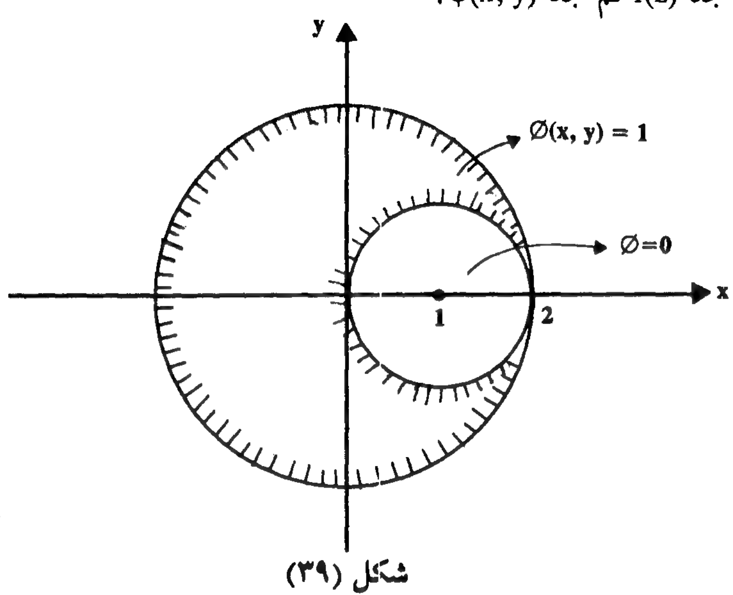


شكل (٣٨)

٣ ـ اذا كانت دالة توزيع الجهد الكهربائي في المنطقة الهلالية معرفة بالمعادلة

$$\phi (x, y) = A. \text{Re}. f(z)$$

حيث A ثابت يعتمد على الشروط الحدودية الموضحة في الشكل (٣٩).
جد $f(z)$ ثم جد $\phi(x, y)$.



شكل (٣٩)

اقتراح: جد دالة مزدوجة الخطية تنقل المنطقة الهلالية الى شريحة مثلاً.

٤ ـ جد دالة توافقية $\phi (x, y)$ تنقل المنطقة المظللة في الشكل (٤٠ ـ أ) الى المنطقة المظللة في الشكل (٤٠ ـ ب) وتحقق الشروط المذكورة على الشكل (٤٠).

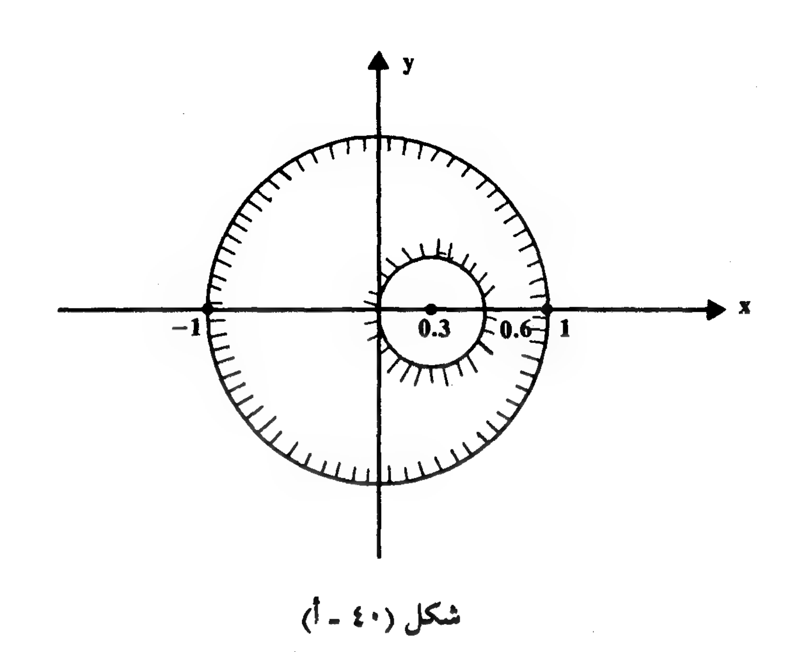
اقتراح: تذكر أن الدالة $f(z) = \dfrac{\lambda - z}{\bar{\lambda} z - 1}, \quad |\lambda| < 1$

تنقل قرص الوحدة الى نفسه وبالاستفادة من الشروط

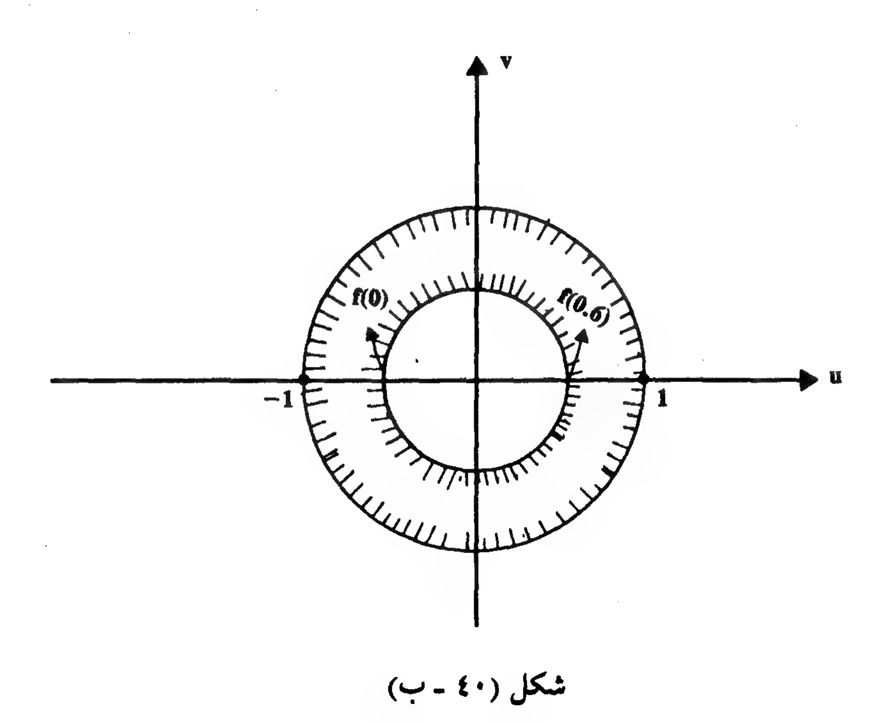
$$f(0) = - f(0.6)$$

يمكن إيجاد قيمة $\lambda = 3, \frac{1}{3}$ وبالتالي تحدد $f(z)$ تماماً ثم جد $\phi (x, y)$

حيث $\phi (x, y) = \text{Re}. f(z) = \text{Re}. \left(\dfrac{1-3z}{z - 3} \right)$.



شكل (٤٠ ـ أ)



شكل (٤٠ ـ ب)

المراجع

1. Boas; Invitation to Complex Analysis, Random House 1987.
2. Churchill R., Brown J.W.; Complex variable and Applications, 4th. Ed. Mc Graw-Hill Inc. Book comp. 1984 London.
3. Fisher, S.D.; Complex Variables, Wadsworth Inc. 1986, Calif. Belmont.
4. Lang, S.; Complex Analysis, Addison-Wesley pub. comp. Inc. 1977, London.
5. Mathews, J.H.; Basic Complex Variables for Mathematics and Engineering, Allyn and Bacon, 1982, Boston.
6. Rudin, W; Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill comp. 3rd Ed. 1986 N.Y.
7. Saff, E.B.; Snider, A.D.; Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics Sciences and Engineering. Prentice-Hall Inc. 1976 New Jersey.
8. Stromberg, K.R.; An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth 1981 Belmont Calif.

قائمة المصطلحات

Negative orientation	اتجاه سالب
Positive orientation	اتجاه موجب
Weierstrass M-test	اختبار ڤيرشتراس
Comparison test	اختبار المقارنة
Ratio test	اختبار النسبة
Independence of path	استقلال عن المسار
Stereographic projection	اسقاط جغرافي
Analytic continuation	استمرار تحليلي
Anti-derivative	أصل المشتقة
Arg z	السعة الزاوية للعدد
Principal branch	الفرع الرئيسي
Principal value	القيمة الرئيسية
Imaginary axis	المحور التخيلي
Real axis	المحور الحقيقي
Extended Complex plane	المستوي المركب المغلق
Residue	باقي
Partition	تجزئة
Transformation	تحويل

Translation transformation	تحويل انسحابي
Magnification transformation	تحويل تكبيري
Linear transformation	تحويل خطي
Rotational transformation	تحويل دوراني
Schwartz-Christoffel transf.	تحويل شوارتز ـ كريستوفل
Bilinear transformation	تحويل مزدوج الخطية
gradient	تدريج
Heat flow	تدفق حراري
Fluid flow	تدفق سائل
Mapping	تطبيق (دالة)
Convergence	تقارب
Absolute convergence	تقارب مطلق
Uniform convergence	تقارب منتظم
Pointwise convergence	تقارب موضعي
Integral	تكامل
Line Integral	تكامل المسار
Trigonometric Integral	تكامل مثلثي
Improper Integral	تكامل معتل
Zero of a function	جذر دالة
Rool of a complex number	جذر عدد مركب
Zero of order m	جذر من الدرجة m
Potential	جهد (طاقة)
Electrostatic potential	جهد كهربائي
Neighbor hood	جوار
Cauchy product	حاصل ضرب كوشي
boundary of a set	حدود مجموعة
Electric field	حقل كهربائي
Vector Field	حقل متجه
Irrotational vector field	حقل متجه غير دوراني

Conservative vector field	حقل متجه محافظ
loop	حلقة
Polygonal line	خط مضلع
Stream lines	خطوط التيار
Force lines	خطوط القوة
Local Properties	خواص موضعية
Circle of convergence	دائرة التقارب
Function	دالة
Stream function	دالة التيار
Sine function	دالة الجيب
Exponential function	دالة أسية
Analytic function	دالة تحليلية
Harmonic Function	دالة توافقية
Cosine function	دالة جيبتمام
Periodic function	دالة دورية
Inverse function	دالة عكسية
Entire function	دالة كلية
Multiple-valued function	دالة متعددة القيمة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Conformal function	دالة مطابقة (مشاكلة)
Rational Function	دالة نسبية
one to one function	دالة واحد ـ لواحد
velocity potential	سرعة الجهد
Argument	سعة زاوية
Chauchy criterion	شرط كوشي
polar form	شكل قطبي
Image	صورة
De Moivre's formula	صيغة ديموافر
Cauchy Integral formula	صيغة كوشي للتكامل

Generalized Cauchy Integral formula	صيغة كوشي للتكامل العامة
Length of a Contour	طول كانتور
Pure Imaginary number	عدد تخيلي خالص
Real Number	عدد حقيقي
Complex Number	عدد مركب
branch	فرع
branch cut	فصل الفرع
chain rule	قانون السلسلة
Maximum Modulus Principle	قانون القيمة العظمى
L'Hopital rule	قانون لوبيتال
disc	قرص
closed disc.	قرص مغلق
open disc	قرص مفتوح
pole	قطب
simple pole	قطب بسيط
complex power	قوة مركبة
power	قوى
Cauchy Principal value	قيمة كوشي الرئيسة
Absolute value	قيمة مطلقة
contour	كانتور (مسار)
closed contour	كانتور مغلق
simple closed contour	كانتور مغلق وبسيط
open contour	كانتور مفتوح
positively oriented contour	كانتور موجب الاتجاه
polynomial	كثيرة حدود
infinity	لا نهاية (الرمز ∞)
Logarithm	لوغاريتم
Triangular Inequality	متباينة المثلث
Sequence	متتالية

Convergent sequence	متتالية تقاربية
Cauchy sequence	متتالية كوشي
vector	متجه
Equipotential	متساوية الجهد
Isothermal	متساوية الحرارة
Series	متسلسلة
Power series	متسلسلة القوى
Taylor series	متسلسلة تايلور
divergent series	متسلسلة تباعدية
Convergent series	متسلسلة تقاربية
Cauchy series	متسلسلة كوشي
Laurent Series	متسلسلة لورانت
Maclaurin Series	متسلسلة ماكلورين
geometric series	متسلسلة هندسية
Connected	مترابط
Continuous	متصل
Domain	مجال
Domain of definition	مجال تعريف الدالة
Simply connected domain	مجال مترابط ترابطاً بسيطاً
Multiply connected domain	مجال متعدد الترابط
partial sum	مجموع جزئي
sum of a series	مجموع متسلسلة
unbounded set	مجموعة غير محددة
Bounded set	مجموعة محدودة
closed set	مجموعة مغلقة
open set	مجموعة مفتوحة
Range of function	مدى الدالة
Conjugate	مرافق
Harmonic Conjugate	مرافق توافقي
Complex conjugate	مرافق مركب
Derivative	مشتقة
Laplace Equation	معادلة لابلاس

parametric equations — معادلات وسيطية

Cauchy-Riemann equations — معادلتي كوشي - ريمان

Complement of a set — مكملة مجموعة

arc — منحني (قوس)

Smooth curve — منحني (مسار) ممهد

Piece-wise smooth curve — منحني ممهد الاجزاء

Directed Smooth curve — منحني ممهد موجه

Level curves — منحنيات المستوى

Region — منطقة

Closed Region — منطقة مغلقة

open Region — منطقة مفتوحة

Exterior of a curve — منطقة خارجية للمنحني

Interior of a curve — منطقة داخلية للمنحني

Riemann Mapping Lemma — نظرية تطبيق ريمان

Green Theorem — نظرية جرين

Schwartz Lemma — نظرية شوارتز

Cauchy Residue Theorem — نظرية كوشي للباقي

Cauchy Integral Theorem — نظرية كوشي للتكامل

Lieouville theorem — نظرية ليوفل

Morera Theorem — نظرية موريرا

Radius of convergence — نصف قطر التقارب

Removable discontinuity — نقطة انفصال قابلة للازالة

accumulation point — نقطة تجمع

Bounday Point — نقطة حدودية

Exerior Point — نقطة خارجية

Interior Point — نقطة داخلية

Singular point — نقطة متفردة

Essential singular point — نقطة متفردة لازمة

Removable singularity — نقطة متفردة قابلة للازالة

Limit — نهاية

parameter. — وسيط